

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 maggio 1924.

V. VOLTERRA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sugli elementi curvilinei, che hanno comuni la tangente e il piano osculatore.* Nota del Socio CORRADO SEGRE ⁽¹⁾.

1. Fissati (nello spazio ordinario, o in uno spazio superiore) tre punti A, B, C, distinti, non allineati, consideriamo *rami di 1° ordine di curve analitiche* aventi l'origine in A, per tangente (ordinaria) la retta AB, come piano osculatore il piano ABC.

I punti P di un tal ramo si possono rappresentare in serie di potenze di un parametro τ così ⁽²⁾:

$$(1) \quad P = A + \tau E + \tau^2 F + \tau^3 G + \dots,$$

ove E indicherà un punto della tangente in A, ed F del piano osculatore. Sarà dunque, per l'ipotesi:

$$(2) \quad E = \alpha A + \beta B, \quad F = \gamma A + \delta B + \epsilon C,$$

indicando $\alpha \dots \epsilon$ dei coefficienti numerici; tra cui β e ϵ saranno essenzialmente $\neq 0$.

Ma possiamo, mutando il parametro, far comparire sempre nella (1) i punti fissi B, C al posto di E, F. Infatti, sostituendo le (2), la (1) diventa:

$$P = (1 + \alpha\tau + \gamma\tau^2) A + (\beta\tau + \delta\tau^2) B + \epsilon\tau^2 C + \tau^3 G + \dots$$

(1) Presentata all'Accademia nella seduta del 13 aprile 1924.

(2) Com'è ormai consuetudine, una relazione lineare omogenea *tra punti*, come la (1), sta per significare che, in un sistema di coordinate omogenee proiettive, essa vale, ogni volta che vi si sostituiscano i punti P, A, E, ... colle loro coordinate omonime p_i, a_i, e_i, \dots (per ogni i).

Dividiamo il 2° membro pel coefficiente di A, e sostituiamo, nella rappresentazione del ramo, il parametro τ coll'altro

$$t = \frac{\beta\tau + \delta\tau^2}{1 + \alpha\tau + \gamma\tau^2}.$$

Ciò è lecito, perchè $\beta \neq 0$; e quella relazione fra t e τ , in un intorno di $\tau = 0$, dà t in serie di potenze di τ , il cui 1° termine è $\beta\tau$; e quindi anche darà τ , nell'intorno di $t = 0$, in serie di potenze di t , col 1° termine t/β . Verrà dunque, alterando P per un fattor numerico,

$$P = A + tB + \varepsilon(t/\beta + \dots)^2 C + (t/\beta + \dots)^3 G + \dots,$$

che possiamo scrivere come serie di potenze di t così:

$$(3) \quad P = A + tB + t^2 mC + \dots,$$

ove m è un coefficiente costante, non nullo, $= \varepsilon/\beta^2$; e i puntini indicano, come sempre nel seguito, termini di grado superiore in t .

2. Un altro ramo di 1° ordine, soddisfacente alle condizioni poste in principio, avrà similmente i suoi punti Q rappresentabili in serie di un parametro u così:

$$(4) \quad Q = A + uB + u^2 m' C + \dots,$$

con $m' \neq 0$. Fra i punti P, Q dei due rami poniamo una corrispondenza analitica biunivoca, per cui l'origine comune A risponda a se stessa; cioè:

$$(5) \quad u = ht + kt^2 + \dots,$$

ove $h \neq 0$. Sostituita questa nella (4), viene:

$$(6) \quad Q = A + htB + t^2(\dots) + \dots$$

La retta congiungente P e Q contiene pure il punto $(Q - P)/t$, ossia, per le (3) e (6), $(h - 1)B + t(\dots) + \dots$. Se facciamo tendere t a 0, P tende ad A, mentre quell'ultimo punto tende a B, se non è $h = 1$. Dunque: data fra due rami [uscanti da A colla stessa tangente e piano osculatore ⁽¹⁾, e però rappresentabili colle (3) e (4)] una corrispondenza biunivoca analitica (5), la retta che unisce due punti omologhi che tendano ad A ha sempre per limite la tangente comune, a meno che sia $h = 1$.

3. Similmente si vedrebbe subito che: se fra i punti di 3 rami (uscanti da A colla stessa tangente e piano osculatore) si pongono corrispondenze univoche in tutti i sensi, e analitiche, come la (5), il piano che congiunge 3 punti omologhi che tendano ad A ha per limite il piano osculatore co-

(1) Per la proposizione attuale basterebbe che i rami avessero comune in A la tangente.

mune, a meno che i coefficienti delle corrispondenze soddisfino a ulteriori relazioni.

Facciamo il caso, che qui importa in special modo, che uno dei tre rami sia semplicemente la retta AB. I suoi punti O si posson rappresentare così:

$$(7) \quad O = A + \nu B,$$

essendo ν un parametro variabile. Prendiamo, insieme a questo, i due precedenti rami (3) e (4), descritti da P e Q. I loro parametri t, u saranno esprimibili in serie di ν :

$$(8) \quad t = \nu + e\nu^2 + \dots, \quad u = \nu + e'\nu^2 + \dots,$$

ove abbiám dato il coefficiente 1 al 1° termine, perchè vogliamo che le congiungenti OP, OQ non abbiano per limite la tangente comune AB (fine del n. 2). Segue, sostituendo:

$$(9) \quad P = A + \nu B + \nu^2(eB + mC) + \dots$$

$$(10) \quad Q = A + \nu B + \nu^2(e'B + m'C) + \dots$$

Il piano di O, P, Q contiene pure i punti $(P - O)/\nu^2$, $(Q - O)/\nu^2$, ossia, per le (7), (9), (10), $eB + mC + \nu(\dots) + \dots$, e analogo. Al limite per $\nu \rightarrow 0$, il piano conterrà i punti A, $eB + mC$, $e'B + m'C$. *Affinchè questo piano-limite non sia precisamente il piano osculatore ABC, dovrà essere:*

$$(11) \quad e'/e = m'/m.$$

4. Fissiamo un fascio di piani (o d'iperpiani), il cui asse sia sghebmò colla retta AB:

$$(12) \quad (\alpha x) = \lambda(\beta x),$$

ove (αx) significa $\sum \alpha_i x_i$, ecc.; e supponiamo che α sia precisamente quel piano del fascio che passa per A, sicchè $(\alpha a) = 0$. Saranno invece (βa) e (αb) non nulli. Consideriamo nel fascio i piani che contengono i 3 punti O, P, Q; e cerchiamo i corrispondenti valori di λ . Per P, mettendo nella (12), al posto delle x_i , le coordinate di P date da (9), abbiamo:

$$\nu(\alpha b) + \nu^2[e(\alpha b) + m(\alpha c)] + \dots = \lambda[(\beta a) + \nu(\beta b) + \dots].$$

Di qua si ricava λ in serie di ν . Sarà:

$$\begin{aligned} (\beta a)\lambda &= \{ \nu(\alpha b) + \nu^2[e(\alpha b) + m(\alpha c)] + \dots \} \cdot \{ 1 - \nu(\beta b)/(\beta a) + \dots \} \\ &= (\alpha b)\nu + [e(\alpha b) + m(\alpha c) - (\alpha b)(\beta b)/(\beta a)]\nu^2 + \dots \end{aligned}$$

Si può trarne, senz'altro, il valore λ_0 di λ relativo ad O, mettendo $e = 0$, $m = 0$; sicchè:

$$(\beta a)\lambda_0 = (\alpha b)\nu - \nu^2 \cdot (\alpha b)(\beta b)/(\beta a) + \dots$$

Ne segue, sottraendo:

$$(\beta a)(\lambda - \lambda_0) = [e(\alpha b) + m(\alpha c)]\nu^2 + \dots$$

Analogamente, se λ' è il valore di λ che spetta al piano passante per Q, sarà:

$$(\beta a)(\lambda' - \lambda_0) = [e'(\alpha b) + m'(\alpha c)]v^2 + \dots$$

e quindi:

$$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0} = \frac{e'(\alpha b) + m'(\alpha c) + v(\dots) + \dots}{e(\alpha b) + m(\alpha c) + v(\dots) + \dots}.$$

Per $v \rightarrow 0$, tenendo conto di (11), viene ⁽¹⁾:

$$\lim \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0} = \frac{m'}{m}.$$

D'altronde, indicando con σ una costante qualunque non nulla, il rapporto $(\lambda' - \lambda_0)/(\lambda - \lambda_0)$ ha lo stesso limite che il birapporto $(\sigma \lambda_0 \lambda \lambda')$. Possiamo dunque concludere: *Dati due rami di 1° ordine Γ, Γ' aventi a comune l'origine A, la tangente AB e il piano osculatore ABC, si ponga fra i loro punti e quelli della AB una triplice corrispondenza analitica, univoca in ogni senso, che faccia corrispondere A a se stesso, e sia tale che il piano di 3 punti omologhi tendenti ad A abbia per limite un piano non passante per la tangente AB ⁽²⁾. Se in un qualunque fascio di piani (od iperpiani) ad asse sghembo con questa retta si forma il birapporto di un piano fisso non passante per A coi piani proiettanti 3 punti omologhi della tangente, di Γ , e di Γ' ; questo birapporto, col tendere di quei punti ad A, avrà un limite ben determinato, che non dipende nè dalla triplice corrispondenza, nè dal fascio di piani (o iperpiani) considerato.*

Quando i due rami Γ, Γ' sian rappresentati colle (3), (4), quel limite è risultato $= m'/m$. Quando invece Γ fosse dato, più in generale, dalla (1) sotto le condizioni ⁽²⁾, e Γ' in modo analogo, col porre degli apici a E, F, ..., α, β, \dots ; poichè (fine del n. 1) $m = \varepsilon/\beta^2$, e quindi similmente $m' = \varepsilon'/\beta'^2$, quel birapporto limite varrà $\beta^2 \varepsilon' / \beta'^2 \varepsilon$.

5. Si può anche enunciare il risultato più concisamente così: *Se si prendono sulla tangente AB, su Γ e su Γ' 3 punti infinitamente vicini ad A, sì che il loro piano non sia vicino ad uno contenente la AB, e costante (ed $= m'/m$, ecc.) — in un fascio di piani (od iperpiani) ad asse sghembo colla AB — il birapporto di un piano ben distinto da quello che passa per A e dei piani, infinitamente vicini, che varno ai suddetti 3 punti.*

Ciò corrisponde a prendere pei parametri v, t, u valori infinitesimi (di 1° ordine). — Si noti che la condizione posta pel piano dei 3 punti, avendo come conseguenza che la retta di due di essi è ben distinta dalla

(1) Si tenga presente che $(\alpha b) \neq 0$, e che anche (αc) si può supporre non nullo.

(2) Si ottiene, ad esempio, una tale triplice corrispondenza, segnando AB, Γ, Γ' coi piani (o iperpiani) di un fascio generico.

tangente AB, conduce a condizioni analoghe alla $h=1$ con cui finiva il n. 2; e quindi alle relazioni (8) tra i parametri. Da queste deriva che, scelto O, cioè r infinitesima, i punti P, Q (ossia i valori infinitesimi di t, u) sono arbitrari solo in questo senso: che sono determinati a meno d'infinitesimi di 2° ordine; i corrispondenti valori di λ, λ' hanno già il termine principale (di 1° ordine) ben determinato. Non vi è dunque, nella arbitrarietà di P, Q, un contrasto coll'essere ben determinato quel tal birapporto.

6. Quando Γ, Γ' sian due rami situati *in un piano*, la condizione pei 3 punti O, P, Q di essere in un piano, che al limite non contenga la AB, significa che quei 3 punti sono *allineati* (su una retta che non tende ad AB). Si ricade così in un teorema contenuto nel n. 1 di una mia antica Nota ⁽¹⁾, alla quale questa può servire di complemento.

Se invece Γ, Γ' sono in uno spazio S_n , con $n > 2$, e si proiettano su un iperpiano da un centro esterno al piano osculatore, si otterranno ancora due rami aventi comuni origine, tangente e piano osculatore; e per questi rami il *birapporto* sarà quello stesso di Γ, Γ' . Ciò appare subito, pensando che il fascio d'iperpiani con cui si proiettavano i punti di Γ, Γ' e della tangente AB sia scelto coll'asse passante pel suddetto centro di proiezione. Ripetendo la cosa, si vede che, anche per proiezioni (generiche) in spazi subordinati qualunque di S_n , il birapporto non muta.

La proiezione avvenga precisamente sul piano osculatore ABC. Allora si sa (vedi Nota cit.) che il birapporto delle due curve piane proiezioni (calcolato nel modo anzidetto) è uguale al rapporto delle loro curvature. Ma la 1ª curvatura di una linea sghemba, o iperspaziale, Γ in un punto A è determinata da A coi suoi due punti successivi, e quindi coincide con quella di una proiezione qualunque di Γ sul piano osculatore. Adunque *il birapporto di Γ, Γ' in A (quale è definito nel n. 4 o 5) coincide col rapporto delle prime curvature di Γ' e Γ in A.*

Chimica. — *Le analogie di comportamento fra alcuni derivati del benzolo ed i corrispondenti derivati della serie alifat ca.*
Memoria del Socio ANGELO ANGELI ⁽²⁾.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

⁽¹⁾ Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie, in questi Rendiconti, serie 5ª, vol. VI, 1897, 2º sem., pag. 168.

⁽²⁾ Memoria presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

Astronomia. — *Osservazioni sul diametro del Sole, fatte nel R. Osservatorio di Roma sul Campidoglio.* Nota del Corrisp. G. AR-MELLINI ⁽¹⁾.

I. — STATO ATTUALE DELLA QUESTIONE.

1. Come fu stabilito dalla Conferenza internazionale delle effemeridi, gli astronomi nel calcolo delle eclissi adottano come raggio apparente del Sole, alla distanza media, il valore di Auwers ⁽²⁾, cioè: $R = 15' 59'' 63$. Noi non discuteremo per ora questo risultato, ricordando solo che esso viene adottato in forza di una convenzione.

Per la calcolazione delle effemeridi invece, occorre tener conto anche della irradiazione che aumenta un poco le dimensioni apparenti del disco solare; e qui non vi è ancora completa unità di vedute benchè la maggioranza degli astronomi, secondo lo stesso Auwers, adotti il valore $16' 1'' 18$.

D'altra parte non si sa ancora se, quando si parla del raggio del Sole, sia logico di assegnarne il valore fino al decimo, o, ciò che è peggio, fino al centesimo di secondo. È possibile infatti che il ciclo undecennale delle macchie solari sia connesso con una lieve variazione delle dimensioni del diametro, o che, in altre parole, il Sole sia una *stella pulsante*. E ciò tanto più che, secondo alcune moderne vedute, sembra che nelle *stelle Cefeidi* la variazione di luce sia dovuta non già ad un'eclisse ma ad una vera pulsazione dell'astro.

2. La questione, del resto, è già stata oggetto di molte discussioni tra gli astronomi che l'hanno studiata con lo *strumento dei passaggi* con l'*eliometro* e con la *fotografia*, senza però poter giungere a risultati sicuri.

Hilfiker ⁽³⁾ dell'Osservatorio di Neuchâtel pubblicò 3468 osservazioni fatte nel trentennio 1840-1870 con uno strumento dei passaggi di 115 mm. di apertura e due metri di distanza focale. Egli trovò che il diametro del Sole è *massimo* quando il numero delle macchie è *minimo* e viceversa: conclusione in cui convenne anche Secchi ⁽⁴⁾.

Auwers ⁽⁵⁾ sostenne invece la costanza del diametro solare, ma più recentemente Schur ed Ambronn ⁽⁶⁾ intrapresero un nuovo esame della questione, prendendo per base le osservazioni fatte nel dodicennio 1890-1902

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924.

⁽²⁾ A. Auwers, *Neue Untersuchungen über den Durchmesser der Sonne* (Berlin, 1889).

⁽³⁾ Cfr. Auwers, op. cit.

⁽⁴⁾ Atti dell'Acc. dei N. Lincei, gennaio, 1872.

⁽⁵⁾ A. Auwers, *Ueber eine angebliche Veränderlichkeit des Sonnendurchmessers* (Berlin, Monat. 1873).

⁽⁶⁾ *Die Messungen des Sonnendurchmessers* (Astr. Mittheilungen der K. Sternwarte zu Göttingen, 1905).

con l'eliometro della specola di Gottinga. Essi giunsero alla conclusione che il Sole è realmente una stella pulsante ⁽¹⁾ con un periodo compreso tra sei ed otto anni e con un'amplitudine di $0''.10$ circa. Non poterono però trovare alcuna relazione tra il diametro dell'astro e l'andamento delle macchie.

Le loro osservazioni furono poi minutamente discusse da Ch. Lane in una bella Memoria pubblicata negli Annali dell'Accademia delle Scienze di New-York ⁽²⁾. Insieme con esse, il Lane ha ripreso in esame le principali serie di osservazioni meridiane ed eliometriche eseguite sul Sole da Lindenau, Secchi, Hilfiker, Anwers, Newcomb, Holden ecc., giungendo alle seguenti conclusioni:

1) La forma esatta del Sole non è ancora conosciuta. In ogni caso però la differenza tra il diametro equatoriale ed il diametro polare, non può superare mezzo secondo di arco.

2) Il Sole è una stella pulsante in connessione col ciclo delle macchie. La pulsazione è dell'ordine del decimo di secondo.

Troppo lungo poi sarebbe riassumere i risultati fotografici; diciamo solo che nemmeno essi sono giunti a togliere con sicurezza ogni dubbio, soprattutto perchè i contorni delle immagini non si presentano sufficientemente precisi per misure di tal genere.

3. Stando così le cose, io credo che sarebbe certamente assai utile rinnovare una discussione analoga a quella dell'Hilfiker, basandosi sopra le osservazioni meridiane che da più di quarant'anni si fanno nel R. Osservatorio di Roma sul Campidoglio. Come il materiale trattato da Hilfiker, anche queste osservazioni vengono fatte con un eccellente strumento dei passaggi di Ertel, di dimensioni quasi identiche, proiettando sopra un apposito schermo i fili del micrometro e l'immagine del Sole assai ingrandita e prendendo quindi i contatti ad occhio e orecchio.

La prima serie dei lavori (Respighi-Di Legge) per varie cause, è in gran parte ancora non discussa. Col 1923 abbiamo iniziato una seconda serie, ed io ne comunico all'Accademia i soli risultati, sperando che l'Osservatorio possa avere in futuro la possibilità di pubblicare integralmente le osservazioni e le discussioni delle due serie.

Osservatori di questa seconda serie sono Gabriella Armellini-Conti, lo scrivente e il tecnico del Campidoglio Pietro Mignucci, i quali nella tabella seguente sono indicati rispettivamente con A C, A ed M. La durata del passaggio del disco solare al meridiano è espressa in mezzi secondi siderali ed ogni valore è fondato sopra *quattordici osservazioni* ottenute esaminando il passaggio dei due bordi ai sette fili centrali del micrometro. Poichè la cifra delle centinaia è sempre 2, essa è stata soppressa scrivendo p. es. 68 invece di 268 ecc. e così pure nelle date è soppresso l'anno che è sempre il 1923. Ciò posto ecco i risultati delle osservazioni:

⁽¹⁾ Schur e Ambronn trovarono anche che il Sole varia di *forma*; ma la questione importantissima ha bisogno di ulteriore conferma.

⁽²⁾ *An investigation of the figure of the Sun and of possible variations in its size and shape.* By Ch. Lane: Annals of the New York Academy of Sciences, June 1909.

II. — TABELLA DELLE OSSERVAZIONI.

[illegible]

III. — DISCUSSIONE DELLE OSSERVAZIONI.

Passiamo ora a discutere queste osservazioni dal punto di vista dei possibili errori sistematici.

Intanto, come già faceva notare lo stesso prof. Respighi, iniziatore della prima serie delle osservazioni solari capitoline, sembra che i risultati siano *indipendenti dalla costante personale*, giacchè essa conserva lo stesso valore nell'appulso dei due bordi e quindi scompare nelle differenze, che rappresentano appunto la durata del passaggio del Sole al meridiano.

Però un'altra causa di errori sistematici, che credo fosse sfuggita al Respighi, è dovuta all'inclinazione dei fili del micrometro; ma una breve discussione mostra che l'errore temuto è in ogni caso estremamente piccolo.

Supponiamo infatti che un filo sia inclinato rispetto alla verticale di un angolo i . Con una facile costruzione geometrica vedremo che l'arco percorso dal centro del Sole nell'intervallo di tempo compreso tra l'istante in cui avviene la tangenza del bordo anteriore e l'istante in cui avviene la tangenza del bordo posteriore è uguale a $\frac{2R}{\cos i}$, dove R è il raggio solare. L'errore E che ne risulta nella misura del diametro è quindi eguale a

$$2R \left(\frac{1}{\cos i} - 1 \right).$$

Tenendo presente che i è molto piccolo, si ha con riduzioni immediate,

$$E = Ri^2.$$

Se invece di un solo filo se ne hanno, n , otteniamo come errore risultante nella media:

$$E = \frac{R}{n} \sum_{k=1}^{k=n} i_k^2.$$

Come si vede l'errore è sempre positivo, ma fortunatamente esso è di secondo ordine rispetto ad i . Nel caso nostro, nessuno dei fili del micrometro aveva un'inclinazione superiore a $10'$ rispetto alla verticale. Risulta dunque con un facile calcolo che l'errore è minore di *un centesimo di secondo di arco* e perciò assolutamente trascurabile.

Anche lo spessore dei fili micrometrici non produce errore apprezzabile, sia perchè sottilissimi, sia perchè l'osservatore determina l'istante di appulso del bordo solare con la linea mediana del filo stesso.

Resterebbe dunque, come unica causa di errore sistematico, l'*irradiazione* che aumenta lievemente (circa $1''$) le dimensioni del disco. Ora anche questa non produce alcun inconveniente per il nostro scopo, e ciò per due ragioni:

1°) perchè noi ci proponiamo di trovare appunto il diametro del Sole aumentato dell'irradiazione, e di paragonare i risultati con i valori adottati dagli astronomi. Infatti, come vedemmo in principio, per il calcolo delle effemeridi occorre precisamente di sapere quale è il diametro del Sole aumentato dell'irradiazione;

2°) perchè l'irradiazione resta costante, almeno per ogni singolo osservatore, e non può quindi impedire di scoprire un'eventuale variazione periodica del diametro del Sole.

Riepilogando, crediamo di dover concludere che le osservazioni solari micrometriche, eseguite col nostro metodo sono esenti da errori sistematici. Contrariamente dunque a ciò che potrebbe sembrare da un esame superficiale, esse possono anche oggi, arrecare un prezioso contributo alla soluzione della questione che ci occupa, purchè fatte con abilità e con buoni strumenti.

IV. — RISULTATI E CONFRONTI.

Accertata dunque l'assenza di errori sistematici, non resta che da considerare i piccoli errori accidentali, valendosi del solito metodo dei minimi quadrati e di ridurre le osservazioni alla *distanza media* tenendo conto del moto ellittico del Sole. Eseguiti i calcoli, che sono certamente complicati, ma non presentano difficoltà, ne risultano i valori riportati qui appresso:

Gabriella Armellini Conti (Osservazioni 146) $R = 16' 1'',44 \pm 0'',07$

Giuseppe Armellini (" 141) $R = 16' 1'',74 \pm 0'',06$

Pietro Mignucci (" 127) $R = 16' 1'',02 \pm 0'',05$

Come media dei valori trovati, abbiamo quindi per il raggio solare R alla distanza media, aumentato dell'irradiazione:

$$R = 16' 1'',40 \pm 0'',02.$$

che coincide quasi col valore $16' 1'',18$ comunemente adottato. Le deboli differenze tra i tre osservatori dipendono dalle condizioni fisiologiche dell'occhio, secondo le quali varia l'irradiazione. Ma, come abbiamo visto, esse restano costanti e non impediscono quindi di scoprire un'eventuale variazione periodica del diametro. Ciò che importa notare invece è che l'errore medio ($0'',02$) è assai inferiore alla presumibile pulsazione del Sole secondo Lane, Ambronn e Schur. Reiterando dunque le osservazioni per un periodo undecennale potremo dire se le conclusioni di questi astronomi debbono o non debbono essere mantenute.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle curve sghembe algebriche con soli rami autoduali.* Nota del dott. GIUSEPPE GHERARDELLI, presentata dal Corrispondente GINO FANO ⁽¹⁾.

1. Le curve sghembe algebriche, le cui tangenti appartengono ad un complesso lineare, godono della proprietà che ogni loro ramo completo è del tipo autoduale ($\nu \nu' \nu''$) ⁽²⁾. Si tratta di una proprietà caratteristica per tali curve?

J. H. Grace ⁽³⁾, che pose per primo la domanda, ritenne di dover dare risposta affermativa per il caso delle curve razionali. Successivamente però M. F. Egan ⁽⁴⁾ ha recato l'esempio di una sestica razionale con due flessi ordinari e due cuspidi del tipo autoduale (212), le tangenti della quale non appartengono ad un complesso lineare.

Sebbene la questione possa, in virtù di questo esempio, considerarsi risolta negativamente, si può nondimeno cercar di stabilire un risultato più preciso. In questa Nota ⁽⁵⁾ viene esaminato, dal punto di vista della geometria della retta, il problema della determinazione di tutti i possibili tipi di curve sghembe con soli rami autoduali; e, per le curve razionali, esso viene risolto.

Indicheremo costantemente nel seguito: con Q una quadrica (non cono) di S_3 , i cui punti si intendono rappresentare le rette dello spazio ordinario; con C una (qualunque) curva algebrica irriducibile contenuta nella quadrica Q insieme alle sue tangenti, e quindi immagine di una sviluppabile algebrica di S_3 ; infine con C_γ una curva C immagine di una sviluppabile il cui spi-

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 18 aprile 1924.

⁽²⁾ In generale una curva sghemba algebrica d'ordine n e genere p , contenuta in un complesso lineare, è dotata di $2(n + 3p - 3)$ flessi ordinari, cioè rami (121). Sotto questa forma la proprietà fu rilevata per la prima volta dal Picard [*Application de la théorie des complexes linéaires*...], Ann. de l'École Normale Sup. (2), 6 (1877), pag. 329]. Per il significato preciso del simbolo ($\nu \nu' \nu''$) vedasi ad es.: Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi* (2ª ediz., Messina, 1923), pag. 439.

⁽³⁾ *A theorem on curves in a linear complex*, Proc. Camb. Phil. Soc., vol. XI, 1902, pag. 27.

⁽⁴⁾ *The linear complex and a certain class of twisted curves*, Proc. Royal Irish Ac., vol. XXIX, 1911, pag. 33.

⁽⁵⁾ Al. chiar prof. Gino Fano che mi ha suggerito questo studio porgo qui i miei più vivi ringraziamenti.

golo di regresso abbia solo rami di tipo autoduale. Per le curve C_γ razionali ha luogo il seguente teorema:

« Una C_γ razionale o è un'asintotica di una quadrica di S_4 ⁽¹⁾, e, come tale, immagine di una sviluppabile contenuta in un complesso lineare; oppure appartiene ad S_5 , ed è sezione iperpiana della rigata delle tangenti di un'asintotica (razionale) di una quadrica di S_6 . Viceversa, ogni tale sezione (generica) è immagine di una sviluppabile *non* contenuta in un complesso lineare, lo spigolo di regresso della quale ha tuttavia solo rami di tipo autoduale ».

Abbiasi ad es. una sestica sghemba razionale con sei flessi; l'immagine della relativa sviluppabile, sulla quadrica delle rette, è una C_γ^{10} razionale con sei cuspidi, la quale, ove non stia in S_4 , sarà sezione iperpiana della rigata delle tangenti di una sestica razionale normale di S_6 .

2. Sia Γ una curva sghemba algebrica; O un suo punto origine di un ramo δ ($\nu \nu' \nu''$); t la tangente in O al ramo δ . Sulla curva C, immagine della rigata delle tangenti di Γ , si consideri il punto T immagine della retta t , e quel ramo δ' , avente T come origine, i cui punti sono le immagini delle tangenti del ramo δ .

Se O è un punto generico di Γ e perciò origine di un ramo δ (111), o, più generalmente, se O è origine di un ramo δ per cui $\nu = \nu''$, il piano osculatore in T al corrispondente ramo δ' tocca la quadrica Q lungo la tangente in T a δ' , ma non è contenuto in Q; se invece $\nu \neq \nu''$, e allora soltanto, il piano osculatore in T a δ' è un piano di Q. Ciò si dimostra nel modo seguente.

Se r è il rango di Γ , cioè l'ordine di C, fra le r tangenti di Γ che si appoggiano ad una retta generica x , la t (tangente nell'origine del ramo δ) ne assorbe:

- a) ν' se x incontra t genericamente;
- b) $\nu + \nu'$ se x appartiene ad O;
- c) $\nu' + \nu''$ se x appartiene al piano α osculatore in O al ramo δ ;
- d) $\nu + \nu' + \nu''$ se x appartiene al fascio (O, α);
- e) $\nu + 2\nu' + \nu''$ se x coincide con t ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Designo qui con tal nome quelle curve appartenenti ad uno spazio $[2r]$, per le quali la corrispondenza fra i punti e i relativi iperpiani osculatori è subordinata dalla polarità rispetto ad una quadrica. Esse giacciono su questa stessa quadrica insieme ai loro $[r - 1]$ osculatori; ed è questa una loro proprietà caratteristica. La determinazione di queste curve si riconduce analiticamente all'integrazione delle equazioni differenziali lineari equivalenti alle loro « aggiunte » di Lagrange; integrazione che può effettuarsi in termini finiti come ha mostrato Darboux: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, II, 1889, p. 99. Vedansi anche: Borel, *Sur l'équation adjointe...*, Annales de l'École Normale Sup. (3), 9 (1892), pag. 63; Fano, *Sulle equazioni differenziali lineari...*, Atti della R. Acc. di Torino, vol. XXXIV, 1899, pag. 388.

⁽²⁾ Cfr. ad es. Bertini, loc. cit., pag. 453.

Sieno poi: Q_0 il cono quadrico di prima specie col vertice in T , immagine del complesso lineare speciale di asse t ; ω', α' i due piani di Q (di sistema diverso), immagini rispettivamente della stella di rette O e del piano rigato α ; s la retta $(\omega' \alpha')$ immagine del fascio (O, α) . Allora, fra le r intersezioni di un iperpiano tangente a Q in un punto variabile X con C , ne cadono in T , origine di δ' :

- a) ν' se X è un punto generico di Q_0 ;
- b) $\nu + \nu'$ se X è un punto generico di ω' ;
- c) $\nu' + \nu''$ se X è un punto generico di α' ;
- d) $\nu + \nu' + \nu''$ se X è un punto generico di $s \equiv (\omega' \alpha')$;
- e) $\nu + 2\nu' + \nu''$ se X coincide con T .

Gli iperpiani tangenti a Q nei punti di Q_0 , non passando tutti per una retta, δ' è, in ogni caso, di ordine ν' , e ha per tangente nell'origine T la retta s . Se $\nu = \nu''$, ciascuno dei due piani ω', α' è semplicemente tangente nell'origine T al ramo δ' , il cui primo rango vale pertanto $\nu = \nu''$. Gli ∞^1 iperpiani tangenti a Q nei punti di s hanno in T incontro $(2\nu + \nu')$ -punto con δ' ; cosicchè il piano osculatore nell'origine T a δ' è certo contenuto nello S_3 polare della retta s , ma non giace sulla quadrica Q (1). Se invece $\nu \neq \nu''$, secondochè $\nu \geq \nu''$ sarà ω' il piano osculatore e α' un piano tangente, o viceversa (2).

Se dunque ogni ramo di Γ è di tipo autoduale, e perciò C è una C_γ , nessun piano osculatore di C_γ apparterrà alla quadrica Q , per modo che la rigata delle tangenti di C_γ , contata due volte, costituirà la completa intersezione della quadrica stessa Q e della varietà dei piani osculatori di C_γ . Per conseguenza, la rigata delle tangenti e la varietà dei piani osculatori di C_γ avranno lo stesso ordine.

Viceversa, ogni curva C , per la quale risulti soddisfatta la condizione precedente è una curva C_γ . Fra le curve C le C_γ sono pertanto caratterizzate da ciò, che nessun loro piano osculatore è contenuto nella quadrica Q .

(1) Proseguendo nell'analisi, lo S_3 polare di s potrà coincidere o no con lo S_3 osculatore in T a δ' . Nella prima ipotesi, che esige $\nu > 1$, l'iperpiano tangente in T alla quadrica Q , avendo in T incontro $(2\nu + 2\nu')$ -punto con il ramo δ' , è l'iperpiano ivi osculatore a δ' stesso; cosicchè il ramo δ' sarà del tipo $(\nu' \nu \nu - i \nu')$ [$i = 1, 2, \dots, \nu - 1$]. Nella seconda ipotesi il secondo rango di δ' vale ν , mentre l'iperpiano tangente in T alla quadrica Q , certo contenente lo S_3 osculatore, potrà coincidere o no con lo S_3 osculatore in T a δ' . Se coincide deve essere $\nu' > 1$ e il ramo δ' è del tipo $(\nu' \nu \nu \nu - k k)$ [$k = 1, 2, \dots, \nu' - 1$]; se non coincide, il terzo rango vale ν' , e δ' è del tipo $(\nu' \nu \nu \nu')$, nulla potendosi affermare della classe di δ' , la quale dipende dal comportamento del complesso lineare osculatore lungo t alla rigata delle tangenti di Γ ; comportamento non determinato, in quest'ultimo caso, dai soli caratteri ν, ν' .

(2) E in ambo i casi lo S_3 e lo S_3 osculatori in T a δ' coincidono rispettivamente con lo S_3 e con lo S_3 polari della retta s e del punto T ; il ramo δ' è caratterizzato, nei due casi, rispett. dai simboli $(\nu' \nu' \nu - \nu'' \nu'' \nu')$ e $(\nu' \nu' \nu' - \nu \nu \nu')$.

Un primo esempio di curve C_Y è offerto dalle asintotiche algebriche di una quadrica di S_4 . Ogni tale asintotica è immagine della rigata delle tangenti di una curva sghemba algebrica appartenente ad un complesso lineare; e viceversa.

Un secondo esempio, essenzialmente diverso, di curve C_Y si ottiene nel modo seguente. Si consideri un'asintotica L algebrica, irriducibile, di una quadrica Q' di S_6 ; la varietà dei piani osculatori e la varietà degli S_3 osculatori di L , polari l'una dell'altra rispetto a Q' , hanno lo stesso ordine; segando pertanto con un S_5 generico π la rigata delle tangenti di L , si ha una curva, appartenente ad S_5 , del tipo voluto C_Y . Si perviene alla stessa C_Y segando con π la rigata delle tangenti dell'asintotica L' dedotta da L mediante l'omologia armonica che ha π come asse, e come centro il polo P di π rispetto a Q' . Le due asintotiche L, L' costituiscono insieme la completa intersezione di Q' e del cono di vertice P luogo delle rette polari, rispetto a Q' , degli S_4 osculatori di C_Y .

Per le C_Y razionali, i due esempi addotti esauriscono tutti i casi possibili. Per dimostrarlo, basterà far vedere che ogni C_Y razionale appartenente ad S_5 può ottenersi come sezione della rigata delle tangenti di un'asintotica (razionale) di una quadrica di S_6 .

3. Abbiassi dapprima una curva C qualunque appartenente ad $S_5 \equiv \pi$. Per la quadrica Q , contenente C e le sue tangenti, si conduca una quadrica Q' , non cono, di S_6 ; le rette polari, rispetto a Q' , degli S_4 osculatori di C sono le generatrici di un cono Δ , appartenente ad S_6 , col vertice nel polo P di π rispetto a Q' ; e l'intersezione totale di questo cono con la quadrica Q' è una curva, che indichiamo con L , mutata in sè dall'omologia armonica ω che ha π come asse e P come centro.

Si consideri la corrispondenza (1, 2) fra le due curve C, L che nasce associando a ogni punto X di C i due punti X', X'' di L situati sulla generatrice del cono Δ polare dello S_4 osculatore in X a C . Il piano tangente al cono Δ lungo la generatrice $PX'X''$ contiene le tangenti t', t'' ad L in X', X'' , e coincide col piano polare (rispetto a Q') dello S_3 osculatore in X a C ; perciò (come questo stesso S_3) esso è tangente in X alla quadrica Q' , e la taglia nelle due rette XX', XX'' ; onde le t', t'' , tangenti rispett. in X' e X'' a Q' e a questa sezione piana, coincideranno rispettivamente con le stesse rette XX', XX'' .

Analogamente, lo spazio S_3 osculatore al cono Δ lungo la generatrice $PX'X''$ è polare rispetto a Q' del piano osculatore a C nel punto X ; esso contiene i due piani osculatori a L nei punti X', X'' , i quali passano per la tangente t a C nel punto X , e costituiscono la sua intersezione con Q' . La L è perciò un'asintotica della quadrica Q' , e la C è doppia per la rigata delle tangenti di L .

Se poi C è una C_Y , e perciò nessuno dei suoi piani osculatori sta (in Q e quindi) in Q' , negli spazi S_3 polari di quei piani, spazi che segano su Q'

le coppie di piani tX' , tX'' , non potranno mai questi ultimi due piani coincidere. Invero un piano tangente a Q' lungo una retta ha un S_3 polare che sega Q' in due piani per questa retta; e solo quando quel primo piano sta su Q' , questi ultimi due coincidono fra loro (e con esso). Per conseguenza, se L è irriducibile, l'involuzione delle coppie di punti $(X'X'')$, riferita bi-razionalmente a C_γ , è priva di punti doppi. Se dunque C_γ è razionale, poichè una g_2^1 (lineare) ha sempre punti doppi, si conclude che L dovrà necessariamente spezzarsi in due asintotiche L_1, L_2 razionali, irriducibili (come C_γ), e omologhe in ω . La C_γ stessa si ottiene pertanto come sezione iperpiana (semplice) della rigata delle tangenti di L_1 (o L_2) ⁽¹⁾.

Se invece C_γ non è razionale, si potrà ottenere per questa via, in generale, soltanto la stessa curva contata due volte.

Matematica. — *Direzioni concorrenti sopra una superficie spiccate dai punti di una curva.* Nota di A. MYLLER, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA ⁽²⁾.

Partendo dal principio che sta alla base del concetto di parallelismo sopra una superficie, introdotto nella scienza dal sig. T. Levi-Civita, si è naturalmente condotti a ricercarne una generalizzazione proiettiva. A tale estensione si giunge attraverso la nozione di fascio di direzioni lungo una curva sopra una superficie.

Sia C una linea tracciata sulla superficie S . Facciamo corrispondere, ad ogni punto M di C , una direzione definita mediante una tangente g alla superficie, uscente da quel punto. Consideriamo la sviluppabile D circoscritta alla superficie S lungo la linea C e fissiamo pure le direzioni g sulla superficie D .

Diremo che le direzioni g sono concorrenti (formano fascio) nel senso di Levi-Civita, lungo la curva C di S , quando le stesse direzioni, pensate come invariabilmente legate alla superficie D , diventano concorrenti nel senso ordinario dopo l'applicazione della sviluppabile D sopra un piano.

Consideriamo sulle rette g, g', \dots la serie di punti I, I', \dots che vengono a sovrapporsi quando si applichi la sviluppabile D sopra un piano. È ovvio che ogni retta g contiene uno solo di questi punti. Ciò posto, dimostreremo che:

⁽¹⁾ Però l'intersezione completa di questa rigata collo spazio S_6 di C_γ può comprendere anche qualche tangente di L (e di C_γ).

⁽²⁾ Presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

La curvâ C' , luogo dei punti I , incontra ortogonalmente i piani tangenti alla superficie S lungo la curva C .

Siano, infatti, P, P' i piani tangenti nei punti consecutivi M, M' di C , e indichiamo con k la loro retta d'intersezione. Nel processo di spiegamento della superficie D nel piano P , il piano P' viene ribaltato di un angolo infinitesimo attorno alla retta k . Ora, per l'ipotesi, questa rotazione porta il punto I' della retta g' nel punto I della retta g , onde segue che l'arco infinitesimo II' di C' è normale al piano P .

Siano $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ le coordinate di un punto generico della superficie S ; $x(s), y(s), z(s)$ quelle di un punto M della linea C , come funzione dell'arco s di C ; $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$ i coseni di direzione della retta g uscente dal punto M ; ϱ la distanza MI .

Scriviamo le coordinate del punto I :

$$x + \varrho \alpha, y + \varrho \beta, z + \varrho \gamma;$$

i parametri di direzione della tangente in questo punto alla curva C' saranno

$$\frac{dx}{ds} + \varrho \frac{d\alpha}{ds} + \alpha \frac{d\varrho}{ds} \text{ ecc.}$$

Esprimendo che quest'ultima retta è perpendicolare al piano P , si ha

$$\frac{dx}{ds} + \varrho \frac{d\alpha}{ds} + \alpha \frac{d\varrho}{ds} = \frac{dy}{ds} + \varrho \frac{d\beta}{ds} + \beta \frac{d\varrho}{ds} = \frac{dz}{ds} + \varrho \frac{d\gamma}{ds} + \gamma \frac{d\varrho}{ds}$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right|$$

Donde, moltiplicando numeratori e denominatori successivamente per

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}; \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v},$$

si ricava

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{dx}{ds} + \varrho \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\varrho}{ds} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \alpha = 0$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dx}{ds} + \varrho \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\varrho}{ds} \sum \frac{\partial x}{\partial v} \alpha = 0.$$

Ma, avendosi

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v', \dots\dots$$

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v', \dots\dots$$

le equazioni precedenti si scrivono (colle solite notazioni)

$$\begin{aligned} & Eu' + Fv' + \frac{d\varrho}{ds} (E\bar{u}' + F\bar{v}') + \\ & + e \left[\frac{1}{2} E_u u'\bar{u}' + \frac{1}{2} E_v v'\bar{u}' + \frac{1}{2} E_v u'\bar{v}' + (F_v - \frac{1}{2} G_u) v'\bar{v}' + E \frac{d\bar{u}'}{ds} + F \frac{d\bar{v}'}{ds} \right] = 0 \\ & Fa' + Gv' + \frac{d\varrho}{ds} (F\bar{u}' + G\bar{v}') + \\ & + e \left[(F_u - \frac{1}{2} E_v) u'\bar{u}' + \frac{1}{2} G_u v'\bar{u}' + \frac{1}{2} G_u u'\bar{v}' + \frac{1}{2} G_v v'\bar{v}' + F \frac{d\bar{u}'}{ds} + G \frac{d\bar{v}'}{ds} \right] = 0. \end{aligned}$$

Sottraendo queste equazioni dopo averle moltiplicate rispettivamente per $G, F; F, E$ risultano le seguenti equazioni differenziali delle direzioni concorrenti nel senso di Levi-Civita:

$$\begin{aligned} e \frac{d\bar{u}'}{ds} + u' + \frac{d\varrho}{ds} \bar{u}' + e \left[\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} u'\bar{u}' + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} (u'\bar{v}' + v'\bar{u}') + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} v'\bar{v}' \right] &= 0, \\ e \frac{d\bar{v}'}{ds} + v' + \frac{d\varrho}{ds} \bar{v}' + e \left[\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} u'\bar{u}' + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} (u'\bar{v}' + v'\bar{u}') + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} v'\bar{v}' \right] &= 0. \end{aligned}$$

È facile dedurne la condizione affinchè le tangenti alle linee $v = \text{cost}$ siano concorrenti nel senso di Levi-Civita lungo le linee $u = \text{cost}$; essa è

$$\frac{d}{dv} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Le rette g , di cui le direzioni sono concorrenti lungo la curva C , generano una superficie rigata (g), sulla quale la curva corrispondente C' è una traiettoria ortogonale delle generatrici. Notiamo ancora che la curva C è il luogo dei centri di curvatura geodetica per la curva C' e che i piani tangenti alla rigata (g) in punti corrispondenti M e I di C e di C' sono perpendicolari.

Matematica. — *Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza e calcolo di una soluzione periodica per il più generale sistema di equazioni differenziali ordinarie.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio BIANCHI (¹).

Le assegnate p funzioni reali $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_p)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) delle $p + 1$ variabili reali t, x_1, x_2, \dots, x_p , siano finite e continue in un certo insieme I di punti dello spazio (t, x_1, \dots, x_p) . In questa breve Nota do condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinché il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie,

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

possieda una soluzione periodica di assegnato periodo T , e do anche un metodo di calcolo approssimato di una tale soluzione, il quale può ritenersi soddisfacente soprattutto dal punto di vista delle pratiche applicazioni.

Mi è grato dichiarare che a ciò sono stato condotto in uno studio per una questione di elettrotecnica pratica propostomi dal prof. G. Vallauri.

1. CONDIZIONE NECESSARIA. — Esista una soluzione periodica, di periodo T , $x_1(t), \dots, x_p(t)$ delle equazioni (1), e sia costituita da funzioni continue. Sussistendo le (1), riusciranno altresì continue le derivate prime di queste funzioni. In virtù di tale continuità, la serie di Fourier della derivata $x'_i(t)$ ($i = 1, \dots, p$) converge in media, nell'intervallo $(0, T)$, verso quella derivata; e, poichè

$$\int_0^T x'_i(t) dt = x_i(T) - x_i(0) = 0,$$

quella serie manca del termine indipendente da t . Posto $2\pi/T = \alpha$, si abbia

$$(2) \quad \frac{dx_i}{dt} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_{ik} \cos k\alpha t + b_{ik} \sin k\alpha t).$$

Indicheremo con $u_i^{(n)}(t)$ la somma dei primi n termini della serie ora scritta. Detto a_i il valore di x_i per $t = 0$ e posto

$$v_i^{(n)}(t) = a_i + \int_0^t u_i^{(n)}(\tau) d\tau = a_i + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} [a_{ik} \sin k\alpha t - b_{ik} (\cos k\alpha t - 1)],$$

(¹) Presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

si avrà

$$x_i(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_i^{(n)}(t) = a_i + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [a_{ik} \sin kat - b_{ik} (\cos kat - 1)],$$

uniformemente, per t variabile in $(0, T)$. Pertanto, e per le note proprietà della convergenza in media, si avrà

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p \int_0^T \left[u_i^{(n)}(t) - f_i(t, v_1^{(n)}(t), \dots, v_p^{(n)}(t)) \right]^2 dt = \\ = \sum_{i=1}^p \int_0^T \left[\frac{dx_i}{dt} - f_i(t, x_1(t), \dots, x_p(t)) \right]^2 dt = 0.$$

Ciò posto, riguardando come variabili i $p(2n+1)$ coefficienti a_i, a_{ik}, b_{ik} , consideriamo, per ogni valore di n , la seguente funzione di quelle variabili:

$$q_n(\dots, a_i, \dots, a_{ik}, \dots, b_{ik}, \dots) = \\ = \sum_{i=1}^p \int_0^T \left[u_i^{(n)}(t) - f_i(t, v_1^{(n)}(t), \dots, v_p^{(n)}(t)) \right]^2 dt,$$

e diciamo $I^{(n)}$ quel ben determinato insieme dello spazio a $p(2n+1)$ dimensioni, nel quale riesce definita la funzione q_n . Questa funzione è continua in $I^{(n)}$ e vi possiede un estremo inferiore non negativo σ_n , non crescente al crescere di n . Ebbene, mi limiterò a considerare la questione nella seguente ipotesi: *Per ogni valore di n , la funzione q_n è dotata, in $I^{(n)}$, di minimo assoluto.*

In tale ipotesi (in pratica, assai poco restrittiva) indicheremo con $A_i^{(n)}, A_{ik}^{(n)}, B_{ik}^{(n)}$ valori di a_i, a_{ik}, b_{ik} per i quali q_n assume il valore σ_n , e porremo

$$(4) \quad \begin{cases} U_i^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^n (A_{ik}^{(n)} \cos kat + B_{ik}^{(n)} \sin kat), \\ V_i^{(n)}(t) = A_i^{(n)} + \int_0^t U_i^{(n)}(\tau) d\tau = \\ = A_i^{(n)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n [A_{ik}^{(n)} \sin kat - B_{ik}^{(n)} (\cos kat - 1)]. \end{cases}$$

In virtù della (3) e per essere sempre $\sigma_n \leq q_n$, ne segue il criterio:

Condizione necessaria affinché il sistema (1) possieda una soluzione periodica, di periodo T , costituita da funzioni continue, è che, detti $A_i^{(n)}, A_{ik}^{(n)}, B_{ik}^{(n)}$ quali si vogliano valori delle a_i, a_{ik}, b_{ik} per i quali q_n assume il suo minimo valore, e fatte le posizioni (4), si abbia

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p \int_0^T \left[U_i^{(n)}(t) - f_i(t, V_1^{(n)}(t), \dots, V_p^{(n)}(t)) \right]^2 dt = 0.$$

In ogni caso σ_n non cresce al crescere di n .

2. CONDIZIONI SUFFICIENTI. — Soddisfatta la condizione necessaria (5), supponiamo che sia possibile scegliere le $A_i^{(n)}$, $A_{ik}^{(n)}$, $B_{ik}^{(n)}$ in maniera che, per ogni valore dell'indice i , il sistema

$$(6) \quad A_i^{(n)}, A_{i1}^{(n)}, B_{i1}^{(n)}, \dots, A_{in}^{(n)}, B_{in}^{(n)},$$

al divergere di n , sia, come dice Schmidt ⁽¹⁾, *convergente fortemente*: si abbia cioè

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(A_i^{(n+q)} - A_i^{(n)})^2 + \sum_{k=1}^n \left\{ (A_{ik}^{(n+q)} - A_{ik}^{(n)})^2 + (B_{ik}^{(n+q)} - B_{ik}^{(n)})^2 \right\} + \sum_{l=n+1}^{n+q} \left\{ (A_{il}^{(n+q)})^2 + (B_{il}^{(n+q)})^2 \right\} \right] = 0,$$

uniformemente al variare dell'intero positivo q . Si ha allora che: 1° al divergere di n , la funzione $U_i^{(n)}(t)$ converge in media verso una funzione $U_i(t)$, di quadrato sommabile in $(0, T)$; 2° la funzione $V_i^{(n)}(t)$ converge, uniformemente in $(0, T)$, verso una funzione $V_i(t)$ continua in $(0, T)$; 3° posto $\lim A_i^{(n)} = A_i$, $\lim A_{ik}^{(n)} = A_{ik}$, $\lim B_{ik}^{(n)} = B_{ik}$, riesce

$$U_i(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (A_{ik} \cos kat + B_{ik} \sin kat) \quad (\text{convergenza in media}),$$

$$V_i(t) = A_i + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [A_{ik} \sin kat - B_{ik} (\cos kat - 1)] \quad (\text{converg. unif.}),$$

$$V_i(t) = A_i + \int_0^t U_i(\tau) d\tau,$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sum_{i=1}^p \int_0^T \left[U_i(t) - f_i(t, V_1(t), \dots, V_p(t)) \right]^2 dt.$$

Ne segue che, fatta al più eccezione per un insieme di valori di t , di misura lebesghiana nulla, la $U_i(t)$ è finita in $(0, T)$ ed è la derivata di $V_i(t)$, risultando $dV_i/dt = f_i(t, V_1, \dots, V_p)$. Con le funzioni V_i possiamo dunque ritenere di avere ottenuta una soluzione periodica del sistema (1). E pertanto:

Condizioni sufficienti affinchè il sistema (1) possieda una soluzione periodica, di periodo T , costituita di funzioni assolutamente continue, sono che si verifichi la (5) e sia possibile scegliere le $A_i^{(n)}$, $A_{ik}^{(n)}$, $B_{ik}^{(n)}$ minimizzanti q_n , in maniera che il sistema (6), per ogni indice i , converga fortemente al divergere di n .

3. OSSERVAZIONI. — I^a. Se le f_i sono dotate di derivate prime rispetto alle x , finite e continue, e se, per ogni n , l'insieme $I^{(n)}$ riesce aperto, le $A_i^{(n)}$, $A_{ik}^{(n)}$, $B_{ik}^{(n)}$ sono soluzioni del seguente sistema di $p(2n+1)$ equazioni:

$$(8) \quad \frac{\partial q_n}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial q_n}{\partial a_{ik}} = 0, \quad \frac{\partial q_n}{\partial b_{ik}} = 0.$$

⁽¹⁾ E. Schmidt, *Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen unbekannten*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXV, 1908, pag. 58.

Ciò, in particolare, avviene se le equazioni (1) sono lineari; in tal caso le (8) risultano compatibili e pur esse lineari, ed esiste sempre il minimo assoluto di q_n [cfr. le mie *Lezioni d'Analisi infinitesimale*, vol. I, pag. 339 (Circolo matematico di Catania; Catania, R. Università)].

II^a. Le funzioni ξ_1, \dots, ξ_p della t siano in $(0, T)$ derivabili e con derivata di quadrato sommabile: diremo che esse *verificano in $(0, T)$ le equazioni (1) con un errore globale q* se si ha

$$q = \sum_{i=1}^p \int_0^T \left[\frac{d\xi_i}{dt} - f_i(t, \xi_1, \dots, \xi_p) \right]^2 dt.$$

Se l'errore q è nullo, le ξ_i sono integrali del sistema (1). Ciò posto, vogliamo osservare che: in ogni caso, nella più completa ignoranza circa l'esistenza o meno di una soluzione periodica di periodo T per il sistema (1), prefissate le funzioni $1, \cos at, \sin at, \dots, \cos nat, \sin nat$, se si domanda di soddisfare alle (1) con una combinazione lineare di tali funzioni, il miglior modo di ottenere ciò, commettendo cioè il minimo errore globale possibile, è quello di prendere le combinazioni $V_i^{(n)}$. Con tali combinazioni, il detto errore σ_n non cresce mai al crescere di n . Sia accertata l'esistenza di una soluzione periodica (di periodo T) per il sistema (1), ciò che potrebbe essere dato dall'esperienza nel caso che le (1) traducano un fatto sperimentale; la condizione (5) è allora certo verificata. Se prendiamo gli sviluppi di Fourier delle funzioni costituenti l'indicata soluzione, arrestati ciascuno al termine $(2n+1)^{\text{mo}}$, si soddisferà sempre alle (1) commettendo un errore globale non inferiore a σ_n ; converrà dunque in pratica, anche se non è assicurata la (7), sostituire ai detti sviluppi arrestati le combinazioni $V_i^{(n)}$. Se è assicurata la (7), le $V_i^{(n)}$ possono però ben riguardarsi, al crescere di n , come successive approssimazioni di una soluzione periodica per il sistema (1), e precisamente della soluzione di cui si conosce l'esistenza se si sapesse inoltre che essa è unica.

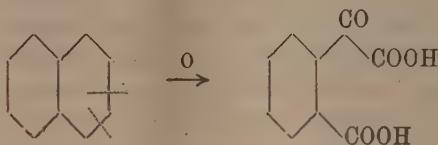
III^a. Per i punti di I la variabile t possa variare in un intervallo $(0, T + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Allora, se non tutte le f_i sono periodiche e di periodo T rispetto alla t , le funzioni di un'eventuale soluzione periodica, di periodo T , per il sistema (1), devono soddisfare in $(0, \varepsilon)$ alle equazioni $f_i(t, x_1, \dots, x_p) = f_i(t + T, x_1, \dots, x_p)$ ($i = 1, \dots, p$). Se per i punti di I la variabile t può variare da $-\infty$ a $+\infty$, quelle funzioni devono verificare le (in generale infinite) equazioni

$$\begin{aligned} f_i(t, x_1, \dots, x_p) &= f_i(t + kT, x_1, \dots, x_p) \\ (i &= 1, \dots, p; k = \dots, -1, 1, \dots). \end{aligned}$$

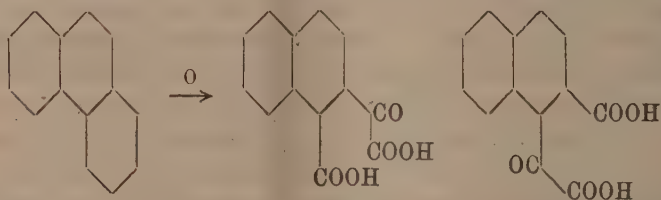
In tali casi, dunque, solo eccezionalmente potrà esistere una soluzione periodica di periodo T .

Chimica. — *Sull'ossidazione del 2-N-fenil- α, β -naftotriazolo con soluzione alcalina di permanganato potassico* ⁽¹⁾. Nota di GAETANO CHARRIER, presentata dal Corrispondente G. ERRERA ⁽²⁾.

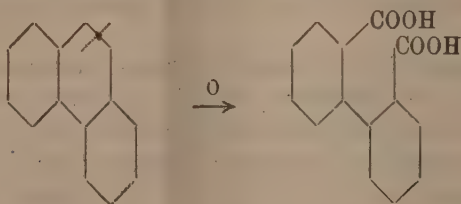
Mentre la naftalina con permanganato potassico in soluzione alcalina si ossida in acido ftalonico



il fenantrene invece di fornire in queste condizioni gli acidi α -carbossil- β -naftil- e β -carbossil- α naftil- gliossilici analoghi dell'acido ftalonico



si trasforma in acido difenico, dimostrando che la parte della molecola più facilmente attaccata dall'ossidante è il cosiddetto ponte



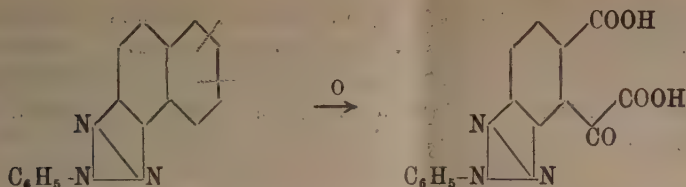
Ho ritenuto dapprima ⁽³⁾ per analogia col comportamento della naftalina che l'acido dicarbossilico ottenuto per ossidazione colla soluzione alcalina di permanganato potassico dal 2-N-fenil- α, β -naftotriazolo fosse da conside-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Pavia.

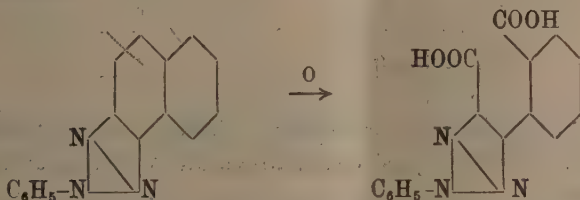
⁽²⁾ Presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

⁽³⁾ Gazz. Chim. Ital., 53, 829 (1923).

rarsi come un acido 2-N-feniltriazolfthalonico vicinale risultante dalla reazione

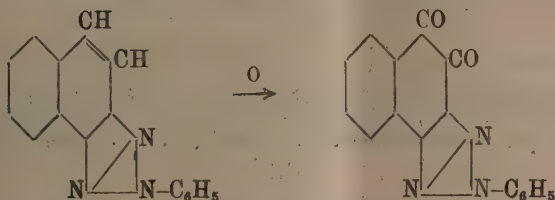


ma invece ho potuto ora dimostrare che analogamente a quanto avviene pel fenantrene col permanganato potassico il 2-N-fenil- α, β -naftotriazolo reagisce secondo lo schema

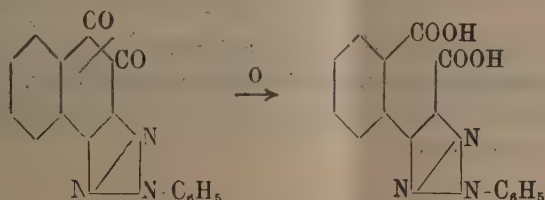


dando luogo all'acido 0-2-N-fenil-4 carbossil-5 triazolil-benzoico.

Infatti il 2-N-fenil- α, β -naftotriazolo si trasforma con miscela cromica nell'ortochinone corrispondente, il 2-N-fenil-4, 5-dicheto- α, β -naftotriazolo



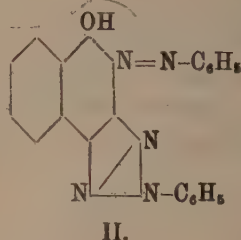
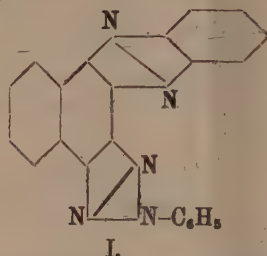
il quale presenta le più grandi analogie col fenantrenchinone e tra l'altro come questo si ossida colla soluzione alcalina di permanganato potassico nell'acido dicarbossilico corrispondente all'acido difenico



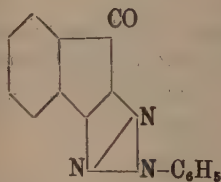
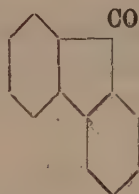
e tale composto è identico a quello ottenuto direttamente per ossidazione del 2-N-fenil- α, β -naftotriazolo.

Con questa reazione un composto ad anello triciclico si trasforma in un altro contenente soltanto anelli monociclici e si passa quindi facilmente con essa da un derivato eterociclico analogo del fenantrene ad un derivato eterociclico analogo del benzolo.

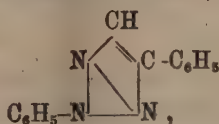
L'analogia del 2-N-fenil-4,5-dicheto- α, β -naftotriazolo col fenantrenchinone è tale che non soltanto le due sostanze presentano la più grande somiglianza fisica e un punto di fusione molto vicino, ma il derivato triazolico oltrechè reagire quantitativamente colle o-diamine e col cloridrato di fenilidrazina formando i derivati azinici (I) e ossiazoici (II) come il fenantrenchinone



per cui è fuor di dubbio la sua struttura o-chinonica, per distillazione secca sulla calce viva fornisce quasi quantitativamente il chetone analogo del difenilchetone

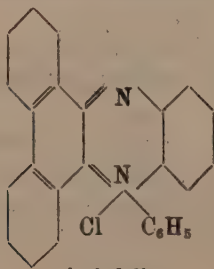


mentre colla calce sodata o fuso colla soda o potassa caustica si trasforma, come avviene pel fenantrenchinone in difenile, in 2,5-difeniltriazolo

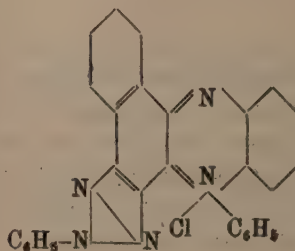


che si ottiene pure per distillazione dell'acido 0-2-N-fenil-4 carbossil-5 triazolilbenzoico.

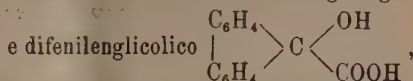
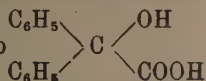
Colla o-aminodifenilamina reagisce facilmente formando un colorante al quale si deve ascrivere una struttura analoga a quella della flavindulina, il prodotto derivante dal fenantrenchinone, che viene considerato come cloruro di N-fenil-fenantrofenazonio



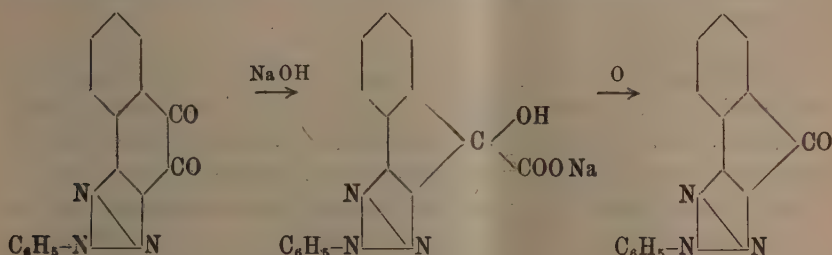
. flavindulina



Infine il 2 N-fenil-4, 5-dicheto- α, β -naftotriazolo per ebollizione cogli alcali caustici in soluzione diluita si trasforma in un acido analogo agli acidi difenilglicolico

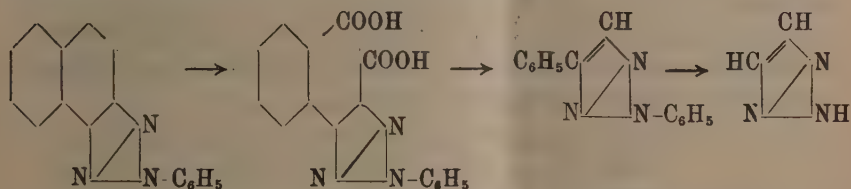


che rispettivamente si ottengono dal benzile e dal fenantrenchinone, il quale ossidato si trasforma come questi nel chetone corrispondente



Rimane perciò stabilito che la struttura dell'o-chinone ottenuto per ossidazione con miscela cromica del 2-N-fenilnaftotriazolo è analoga a quella del fenantrenchinone e quindi la struttura dell'acido da esso risultante per ossidazione con permanganato potassico deve essere analoga a quella dell'acido difenico.

La trasformazione di questo acido in 2, 5-difeniltriangolo, mentre costituisce una nuova conferma della sua struttura, ha grande importanza pel passaggio dagli α, β -naftotriazoli al triangolo fondamentale



La parte sperimentale verrà pubblicata nei prossimi fascicoli della Gazzetta Chimica Italiana.

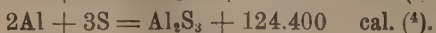
Chimica. — *Azione del solfuro di alluminio sopra alcuni composti organici* ⁽¹⁾. Nota di G. R. LEVI e G. NATTA, presentata dal Socio G. BRUNI ⁽²⁾.

Nella letteratura del solfuro di alluminio ed in quella dei principali composti organici solforati (mercaptani, solfuri ecc.) non si trovano indicazioni sulla azione di questo solfuro sui principali composti organici (alcooli, eteri, fenoli ecc.). *A priori* si può pensare che l'azione del solfuro di alluminio si possa esplicare in tre diversi modi: *a*) azione condensante analoga a quella dei sali anidri dell'alluminio con gli alogeni; *b*) azione disidratante con formazione di ossido di alluminio ed eliminazione di acido solfidrico; *c*) azione solforante per sostituzione dell'ossigeno con lo zolfo. Si può anche presumere che tali azioni possano essere contemporanee.

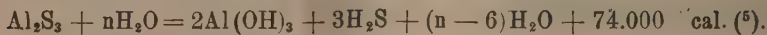
Dai risultati preliminari esposti in questa Nota risultano esempi del tipo *b*) e *c*) mentre finora non abbiamo avuto occasione di constatare alcuna azione condensante specifica del solfuro di alluminio.

Per i composti alifatici sperimentati è stata constatata prevalentemente azione solforante e come concomitante anche eventuale azione disidratante, mentre per i composti aromatici si è osservata sinora essenzialmente azione disidratante.

La sostituzione dello zolfo con l'ossigeno nel solfuro di alluminio trova facile spiegazione dal confronto dei rispettivi calori di formazione dell'ossido e del solfuro essendo il primo assai superiore:



L'azione disidratante trova spiegazione nel forte sviluppo di calore che si origina per azione dell'acqua sul solfuro di alluminio:



Fra i metodi di sintesi dei mercaptani che trovano qualche analogia con quello descritto in questo lavoro ricordiamo quello di Plotnikow ⁽⁶⁾ che

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica generale del R. Politecnico di Milano.

⁽²⁾ Presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

⁽³⁾ Richards J. Franklin Inst., 139, pag. 295.

⁽⁴⁾ Sabatier, Comp. Rend., 90, pag. 619.

⁽⁵⁾ Sabatier, loc. cit.

⁽⁶⁾ Journal Russ. Phys. Chem. Ges., 45, pag. 1162 e 48, pag. 1896.

adopera come sostanze solforanti i prodotti di addizione dell'acido solfidrico col bromuro di alluminio e come sostanze organiche i bromuri alchilici.

Per azione dell'acetilene sull'acido solfidrico in presenza di catalizzatori si forma accanto a tiofene una certa quantità di mercaptano ⁽¹⁾, mentre da alcool e solfuro di carbonio su ossido di titanio ⁽²⁾ si ottengono anche considerevoli quantità di mercaptano.

Il metodo di R. L. Kramer ed E. Emmet Reid ⁽³⁾ di preparazione dei mercaptani è quello che come rendimenti più si avvicina al nostro.

Questi AA. hanno ottenuto delle rese rispettivamente del 41 e 35 % in metil ed etil mercaptano facendo passare su della pomice all'ossido di torio convenientemente preparata e riscaldata a 380° i vapori di alcool ed acido solfidrico in rapporti equimolecolari.

Recentemente K. Kindler e F. Fiindorf ⁽⁴⁾ hanno preparato le tioamidi utilizzando come sostanza solforante il solfuro di alluminio.

* * *

1°) Gli idrocarburi della serie aromatica (benzolo, toluolo ecc.) sino a temperature non molto superiori al punto di ebollizione non reagiscono col solfuro di alluminio. A temperature più elevate (800–900°) il benzolo in vapore condotto su pezzi di solfuro di alluminio subisce una parziale decomposizione e si formano prodotti di condensazione con contemporaneo svolgimento di acido solfidrico e deposito di carbone. Tra i prodotti che si formano abbiamo separato per distillazione frazionata o cristallizzazione con solventi difenile, fenantrene, trifenilene ecc., ma non composti solforati; però tale condensazione del benzolo, a parte la formazione di acido solfidrico, avviene anche, come è ben noto, in assenza di solfuro di alluminio per presenza di corpi porosi inerti per es. pietra pomice.

I rendimenti sono circa-eguali nei due casi per es. in due prove di confronto si ottennero gr. 6,94 di difenile in presenza di solfuro di alluminio e gr. 6,79 in presenza di pietra pomice su gr. 40 di benzolo alla stessa temperatura di 800°. Praticamente le due azioni si possono ritenere eguali per quanto dal punto di vista chimico non si possa dire che esse si equivalgano esattamente; l'idrogeno che nel solfuro di alluminio dà acido solfidrico nel caso della pietra pomice o deve eliminarsi allo stato libero o come idrocarburi più idrogenati del benzolo.

2°) Ben diverso è il comportamento dei composti ossigenati sia della serie grassa che di quelli della serie aromatica. Un esempio di azione semplicemente disidratante è quella esercitata sui fenoli o naftoli a temperatura

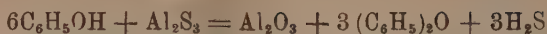
⁽¹⁾ F. P. 524958 del 30/6/1920 e Cent. Blatt. (1922), II, pag. 204.

⁽²⁾ F. A. Gilfillan, J. Am. Chem. Soc., 44, pag. 1323 (1922).

⁽³⁾ J. Am. Chem. Soc., 43, pag. 830 (1921).

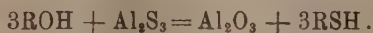
⁽⁴⁾ Berichte, 54, pag. 1079.

relativamente bassa per es.:



che equivale alla eliminazione di una molecola di acqua da due molecole di fenolo. La reazione si completa in breve tempo a temperatura anche un po' inferiore a quella di ebollizione del fenolo. Il rendimento in etere fenilico è elevato ed il prodotto si ricava facilmente puro per semplice distillazione; se l'azione del solfuro di alluminio in eccesso viene prolungata, si ottengono composti di condensazione più complessi di aspetto resinoso che si decompongono ad alta temperatura senza fondere.

3°) Importante è l'azione del solfuro di alluminio sugli alcoli della serie grassa, azione che avviene prevalentemente secondo lo schema:



I vapori dell'alcool furono fatti passare attraverso un tubo convenientemente riscaldato e contenente uno strato di solfuro di alluminio in pezzi per una lunghezza di circa 40 cm. La quantità di alcool usata in ogni operazione fu di 40-50 gr. introdotto in un intervallo di tempo di circa 3 ore; i prodotti venivano condensati in un serpentino immerso in ghiaccio e sale. Dal prodotto così raccolto venivano separati i vari componenti per distillazione frazionata identificandoli poi come mercapturi di mercurio. Le singole porzioni distillate furono anche analizzate per determinazione iodometrica (1). È da osservare come in queste operazioni si possa adoperare sia un solfuro di alluminio in massa porosa che un prodotto fuso e compatto; per la rapidità della reazione è preferibile un prodotto un poco poroso.

Riportiamo sotto i rendimenti di mercaptano e solfuro etilico a diverse temperature:

Temperatura	Alcool inalterato	Mercaptano etilico	Solfuro etilico	Composti a punto di eboll. superiore
	%	%	%	%
I. 150-200°	—	tracce	—	—
200-250°	17,5	12,5	tracce	—
260-310°	14,3	44,6	10,7	2,1
310-360°	2,9	39,1	18,5	5,5

Operando a temperature inferiori a 300° si formano dei composti alluminio organici che vengono trascinati dai vapori e vanno a condensarsi nei tubi dando facilmente luogo a ostruzioni.

A temperature superiori ai 300° tale inconveniente non si verifica; si possono scomporre facilmente questi composti facendoli passare su lana di vetro o amianto riscaldati. Mentre a basse temperature si ritrova parte dell'alcool inalterato e perciò facilmente recuperabile in pratica, a temperature

(1) Kimball, Kramer e Emmet Reid. J. Am. Chem. Soc., 43 (1921), pag. 1199.

più elevate esso viene quasi totalmente decomposto dal solfuro di alluminio con produzione di acido solfidrico e di idrocarburi. Operando più rapidamente e cioè facendo passare la stessa quantità di alcool in un'ora di tempo, si ebbe a 300° il seguente risultato:

Alcool inalterato 40 % mercaptano 43 % solfuro etilico assente
e a 330°

Alcool inalterato 37,8 % mercaptano 46 % " " "

In tali condizioni perciò oltre ad ottenere un mercaptano esente di solfuro si ha il vantaggio di riottenere la maggior parte dell'alcool che non ha reagito.

Operando nelle condizioni della tabella I) l'alcool metilico diede a 300° 40-45 % di metilmercaptano e 15 % di solfuro metilico: l'alcool propilico normale a 310° diede 32,5 di propilmercaptano p. eb. 67-68° e 7,5 % di solfuro propilico p. eb. 142° e 11,3 % di alcool propilico inalterato. Il propilmercaptano identificato attraverso il suo mercapturo di mercurio $\text{HgS}(\text{C}_3\text{H}_7)_2$ p. f. 68° è dotato in minimo grado dell'odore tipico di queste sostanze.

I rendimenti in mercaptani sopra riportati sono nettamente superiori a quelli del metodo catalitico di Kramer e Emmet Reid (loc. cit.) ed il procedimento è notevolmente più semplice dal punto di vista pratico.

4°) Gli eteri ossidi degli alcoli reagiscono facilmente col solfuro di alluminio sostituendo l'ossigeno con lo zolfo e dando origine ai corrispondenti solfuri alchilici. In condizioni analoghe a quelle usate per gli alcoli abbiamo ottenuto a temperature sensibilmente superiori i seguenti risultati:

Temperatura	Etere etilico inalterato %	Solfuro etilico %	Composti a punto di eboll. superiore %
300-330°	67,5	23,1	10
350-375°	35,0	44,0	1,5
400-425°	10,1	11,5	3,0

La reazione procede regolarmente, il solfuro etilico è praticamente puro per semplice distillazione. Riutilizzando l'etere inalterato per successive operazioni si ha una resa dell'80 % rispetto all'etere impiegato a temperature intorno a 350°; anche qui, come per i mercaptani, a temperature più elevate si formano prodotti gassosi che abbassano il rendimento.

Riferiremo, a seguito delle presenti ricerche, sull'azione del solfuro di alluminio su altre sostanze organiche ossigenate.

Chimica. — *Sul composto ossimico ed immidico della ftaleina del fenolo* ⁽¹⁾. Nota di BERNARDO ODDO e DANTE CURTI, presentata dal Socio PATERNÒ ⁽²⁾.

In alcune delle Note precedenti ⁽³⁾ sono state esposte le ragioni per le quali le reazioni di copulazione con i diazoniosali possono riuscire vantaggiose per giudicare della struttura di complessi così instabili, quali si mostrano quelli di cui sono formate le ftaleine.

Essendosi già sperimentati in tale senso i sali di fenolftaleina, si è creduto ora che valesse conto di cimentare anche altri derivati dello stesso prodotto, ed abbiamo scelto l'ossima e l'imide, in considerazione soprattutto del fatto che la fenolftaleinossima (la quale è stata poi l'unica sostanza che abbia dato una seria conferma alla formola chinoide, attribuita ai sali di fenolftaleina) può considerarsi, relativamente a questi sali, come prodotto di una reazione più profonda, richiedendo, per la sua formazione, non solo la presenza di alcali (idrati alcalini), ma anche di una temperatura di molto superiore alla normale.

Lo stesso è da ritenere invece che non avvenga per la fenolftaleinimide, data la piccola quantità di ioni ossidrilici presenti nelle soluzioni ammoniacali, in ragione della grande prevalenza in essa del sistema di sinistra nell'equilibrio:



Usando con ambedue i prodotti gli idrati alcalini nelle quantità volute da molecole aventi tre idrogeni sostituibili, per la presenza rispettivamente del gruppo ossimico ed imminico, abbiamo fatto agire prima una molecola di diazoniosale e poi, in altra esperienza, tre molecole. In questo modo, mentre si riesce ad introdurre sempre nella fenolftaleinossima un solo gruppo azoico, con l'imide invece si arriva rispettivamente a monoazo ed a bisazocomposti.

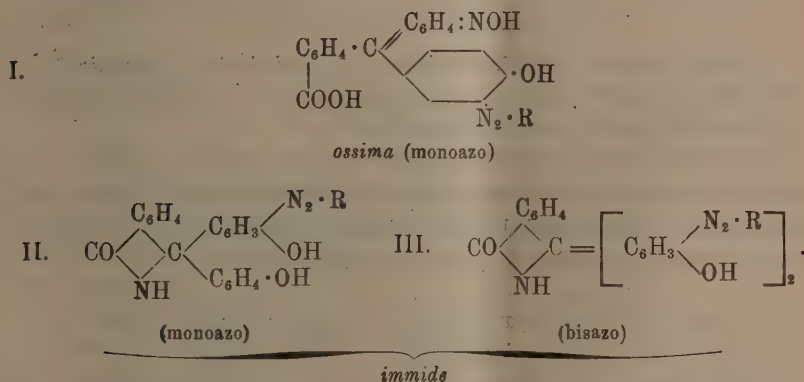
Potendosi escludere che ciò, in analogia a quanto sarà accennato poco appresso a proposito della o-diclorofenolftaleina e della o-cresolftaleina, sia da attribuirsi alla negatività del gruppo ossimico nei confronti coll'imido-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto chimico farmaceutico della R. Università di Pavia.

⁽²⁾ Presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

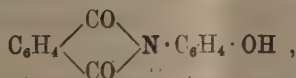
⁽³⁾ B. Oddo, Gazz. chim. ital., 43, II, 175 (1913); 45, II, 186 (1915).

gruppo, dato che nelle loro formole lattoidi ambo i gruppi rimangono estranei agli anelli in cui si compie la copulazione, si è portati ad ammettere che una tale differenza di comportamento, rispetto alle reazioni di copulazione, va ricercata in una struttura diversa, che per l'ossima è la chinoide e per l'imide la lattoido:



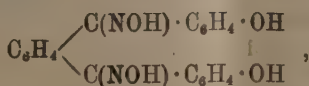
Corrispondentemente a queste formole infatti la (I) fornisce facilmente un biacetilderivato; la (II) e la (III) conducono invece sempre ad un triacetilderivato.

Nel ripreparare la fenoltaleinossima, necessaria per le suaccennate esperienze, servendoci del solito metodo, abbiamo notato poi che assieme all'ossima si forma costantemente un altro prodotto, sfuggito agli altri AA. che si sono occupati di detta preparazione: la p-ossiftalanile



identica alla sostanza ottenuta, per primo, da A. Piutti⁽¹⁾, fondendo l'anidride ftalica col p-amminofenolo.

Di una p-ossiftalanile si occupa anche H. Meyer⁽²⁾, avendola ottenuta trattando la fenoltaleinossima con una soluzione idroalcoolica di cloridrato di idrossilammina in eccesso. Fautore della formola chetonica dei sali di fenoltaleina, in seguito ad una complessa trasposizione, circa della stessa natura di quella osservata per l'etilidene e la benzilidene ftalide⁽³⁾, Meyer spiegherebbe la formazione di questo prodotto, ammettendo che in un primo tempo si formi una diossima

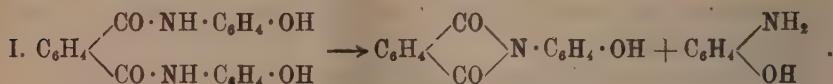


⁽¹⁾ Gazz. chim. ital., 16, 251 (1886).

⁽²⁾ Mon., 20, 337 (1899).

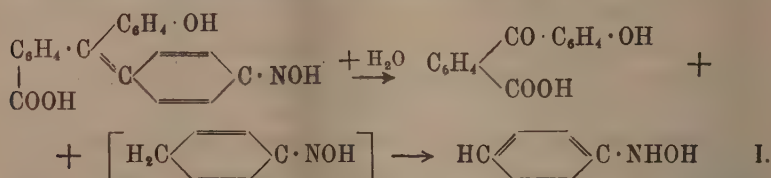
⁽³⁾ G. Neumann, Ber., 18, 14 (1895).

poi, in seguito ad una doppia trasposizione di Beckmann, si avrebbe il prodotto (I), il quale per ultimo, eliminando una molecola di p-amminofenolo, darebbe la p-ossifenilftalimide:



Ora a noi sembra che la formazione di p-ossiftalanile e p-amminofenolo possa essere facilmente spiegata anche pigliando come prodotto di partenza la monossima, e nella sua forma chinoide.

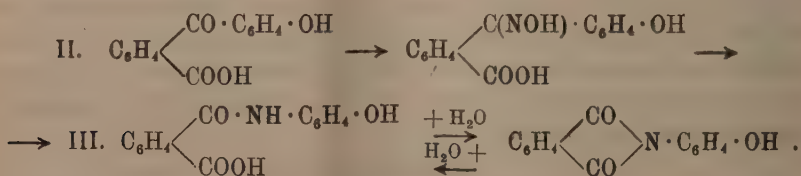
Su di essa cioè si provocherebbe in un primo tempo un'idrolisi per opera dell'acido cloridrico (del cloridrato di idrossilammina), per cui verrebbe scissa in chetossiacido, e cioè nell'acido p-ossibenzoil-o-benzoico, ed in una chinossima idrogenata (β -fenilidrossilammina) (I):



che Friedländer⁽¹⁾ non potè riconoscere come tale, sconsigliandosi allora la sua facile isomerizzazione in p-ammidofenolo⁽²⁾.

Facendo agire infatti, come abbiamo potuto accertarci, sulla fenolftaleinossima una soluzione sia in alcool assoluto, sia in alcool a 75° di idrossilammina libera ed in ambiente debolmente alcalino, si riottiene la fenolftaleinossima inalterata, ciò che sta a dimostrare appunto che l'idrolisi è provocata effettivamente dall'acido cloridrico.

In un secondo tempo poi l'acido p-ossibenzoil-o-benzoico (II) reagisce con l'idrossilammina per dare la corrispondente ossima che tosto si isomerizza, in seguito alla trasposizione di Beckmann, nell'acido p-ossifenilftalamico (III). Questo infine perde facilmente una molecola di acqua per dare la p-ossiftalanile (IV):



(1) Ber., 26, 174 (1893).

(2) Tale trasformazione che, come si potè rilevare in seguito, avviene con grande facilità, sia che si operi in presenza di acido solforico, sia in soluzione neutra, viene infatti ormai spiegata mediante la formazione intermedia di un p-immidoidrochinone (Bamberger, Ber., 33, 3600 (1900)).

Vogliamo per ultimo ricordare che recentemente F. Consonno e C. Apostolo⁽¹⁾, hanno cercato di portare un contributo sulla discussa costituzione, copulando un composto della fenolfaleina, per il quale si rendesse impossibile la formazione del bisazo, corrispondente alla formola chinoida. Fecero uso dell'odichlorofenolfaleina, ed avendo ottenuto un monoazo, attribuiscono alla « fenolfaleina ed ai suoi sali » costituzione chinoida.

Ora, a parte che la questione, così come oramai viene da tutti posta, va differenziata tra fenolfaleina come molecola libera e sali di fenolfaleina, ci sembra che l'avvenuta introduzione di un solo azogruppo nella dichlorofaleina, potrebbe dipendere dalla presenza dei due atomi di cloro, relativamente al fatto che, in linea generale, l'attività di un copulante diminuisce ed anche si annulla se presenti, in esso, gruppi negativi. Avverrebbe cioè l'opposto che per i diazoderivati, che, come è noto, con gli stessi gruppi diventano più attivi.

Una conferma in questo senso si avrebbe, come ci ha comunicato gentilmente il prof. dott. C. Finzi, con copulazioni eseguite con la o-cresolfaleina: i due gruppi alchilici cioè che essa contiene, e che sono positivi, favoriscono la reattività del copulante, ragione per cui si può arrivare anche a dei bisazo.

Riservandoci di svolgere la parte sperimentale in altro periodico, riportiamo qui solo le principali proprietà dei corpi ottenuti:

1°) *p.Ossiftanile* $C_8H_{10}O_3N$: cristalli leggermente gialli, lamellari, birifrangenti; p. f. 286°. L'acetilderivato (cristalli bianchi dal benzolo) fonde a 235°-236°.

2°) *Monoazofenolfaleinossima* $C_{26}H_{19}O_4N_3$: cristalli in verde-oscuro dalle soluzioni in alcool metilico, concentrate nel vuoto; p. f. 202°. L'acetilderivato $C_{30}H_{23}O_6N_3$ (cristalli aghiformi dall'alcool) fonde a 231-232°. Numero di acetile due.

3°) *Monoazofenolfaleinimide* $C_{26}H_{19}O_3N_3$: minuti cristalli, giallo-pallidi dal benzolo; p. f. 248-250°.

L'acetilderivato $C_{32}H_{25}O_6N_3$ (cristalli dall'alcool) fonde a 183°. Numero di acetile tre.

4°) *Bisazofenolfaleinimide* $C_{32}H_{23}O_3N_5$: piccoli cristalli giallo-bruni, dall'alcool metilico; p. f. 270-272°.

L'acetilderivato $C_{38}H_{29}O_6N_5$ (microcristalli bruni dal benzolo) fonde a 207-208°. Numero di acetile tre.

(1) Gazz. chim. ital., 51, 60 (1921).

Geologia. — *Sulla costituzione geologica delle isole di Piscopi, Simi, Càlimno, Lero, Lipso e Patmo (Mare Egeo).* Nota preventiva di ARDITO DESIO, presentata dal Socio CARLO DE STEFANI ⁽¹⁾.

Anteriormente al viaggio da me compiuto nel Dodecaneso ⁽²⁾ tra l'agosto 1922 e il febbraio 1923, erano più o meno note e rilevate geologicamente le isole di Cos, Caso, Scàrpanto, Stampàlia, Nisiro, mentre qualche breve cenno su materiali raccolti dal Forsyt Major esisteva anche per Càlimno (De Stefani, 1912). Le mie ricerche furono pertanto limitate alle isole di Piscopi, Simi, Càlimno, Lero, Lipso e Patmo con isolotti dipendenti, oltre all'isola di Castelrosso presso la costa della Licia nel Mare di Levante e quindi ormai fuori dal Dodecaneso.

Riservandomi di ritornare sull'argomento quando sia stato esaurito lo svolgimento della monografia in corso di lavoro, e dopo un secondo viaggio sul luogo che mi sto accingendo a compiere, mi limito per ora ad alcuni cenni riassuntivi sulle principali osservazioni eseguite.

Paleozoico. — Sul lato meridionale dell'isola di Lero, in un complesso di arenarie e scisti argillosi con intercalazioni calcaree, osservai in due località dei limitatissimi affioramenti di un calcare roseo costituito per intero da articoli di crinoidi e accompagnato da un calcare nero suberistallino cosparsa di gusci mal conservati di brachiopodi e resti di piante. Sebbene ancora il materiale non sia stato esaminato esaurientemente, tutto induce a ritenerlo Paleozoico e probabilmente Carbonifero. Prescindendo da località lontane (Chio, Asia Minore, Grecia) il carbonifero era stato segnalato nell'isola di Cos in un complesso del tutto simile a quello di Lero e in esso furono determinati dei fossili appartenenti a tale periodo.

Questi terreni fortemente ripiegati e sconvolti, non paiono tuttavia rappresentare la formazione più antica dell'isola, alla quale invece sarebbe da ascrivere un complesso di scisti micacei, anfibolitici, di filladi, in cui sono immersi banchi di calcari saccaroidi lamellari bianco-grigi, complesso assolutamente privo di resti organici e forse in parte prepaleozoico. Tale gruppo

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

⁽²⁾ Per Dodecaneso intendo tutte le isole occupate dall'Italia nell'Egeo (Sporadi meridionali) esclusa Rodi.

di rocce scistoso-cristalline compone buona parte dell'isola di Lero, il lato sud-orientale di quella di Lipso con gli isolotti vicini e il margine occidentale di quella di Cálimno.

La direzione degli strati è molto variabile: a Lero prevalgono le direzioni NNE e NNO, ma spesso due direzioni coniugate N-S e E-O come a Lipso; a Cálimno da NO a O.

Mesozoico. — Nelle isole di Lero e di Lipso, al disopra degli scisti cristallini, giace spesso un insieme di scisti argillosi, arenarie, conglomerati quarzosi rosso-violacei il quale viene a sua volta ricoperto con discordanza da una potente pila di calcari bianco-grigi per lo più leggermente brecciati e nerastri alla base, compatti e spesso saccaroidi o porcellanacei superiormente. Gli scarsissimi resti organici, pessimamente conservati, raccolti nei calcari, non permettono alcun giudizio positivo sulla loro età.

Per le analogie con la serie dell'Anatolia, di alcune delle Cicladi vicine e della Grecia, riterrei la formazione scistoso-arenaceo-conglomeratica e fors'anche una parte dei calcari trasgressivi soprastanti, come appartenenti ad un'epoca anteriore al Cretaceo. A Lero i livelli più elevati di questa pila di calcari, con poche tracce di stratificazione, presentano un aspetto ceroide ed appaiono notevolmente simili a quelli che compongono buona parte dell'isola di Cálimno, di Cos, di Càppari, di Simi, probabilmente di Calchi, di Sirina, di Stampàlia, di Scàrpanto, di Caso e il rilievo meridionale di Piscopi. I calcari ceroidi in genere, già attribuiti al Cretaceo superiore, mi hanno fornito a Cálimno, Simi e Piscopi un certo numero di fossili (*Nerinee*, *Actaeonelle*, *Chondrodonte*, *Ippuriti*, *Radioliti*, *Ellipsactinae*, *Stromatopore*, ecc.) non molto ben conservati ma tuttavia sufficienti per attestare la presenza del Cretaceo superiore (Turoniano e Senoniano) anche in queste tre isole, come venne confermato dall'esame paleontologico compiuto dal prof. Parona. Nelle isole di Simi e di Piscopi i calcari ceroidi, che nei loro strati più elevati contengono scarsi nuclei di selce cornea, sono ricoperti da un mantello smembrato di calcari selciferi in sottili straterelli, grigio-azzurrognoli e rossastri, i quali riposano con discordanza sui precedenti e sono da essi separati per mezzo di una breccia a frammenti calcarei e selciferi. I diaspri che compaiono pure in masse abbastanza estese nei livelli più elevati di questi calcari, sono ricchissimi di radiolarie tra le quali il prof. Parona osservò delle forme ritenute appartenenti al Cretaceo superiorissimo, osservazioni confermate dal prof. Squinabol.

Anche in altre isole, da me non visitate, quali Stampàlia, Cos, Calchi, Caso e Scàrpanto ricompaiono gli stessi calcari selciferi trasgressivi come si può desumere, se non dalle carte, dalle singole descrizioni geologiche. A Patmo affiorano sull'estremità sud occidentale dell'isola, dei calcari saccaroidi biancastri con indizi di stratificazione. Il profondo metamorfismo di contatto subito, ha fatto però scomparire qualsiasi traccia di organismi per

cui la loro età rimane indeterminata, ma non è improbabile che corrispondano a quelli analoghi, per aspetto, di Lero e Lipso.

La direzione delle pieghe è molto varia tra isola e isola. A Piscopi predomina la direzione N, a Simi O e NNO, a Calimno ONO e a Lero NNO.

Cenozoico. — L'*Eocene* relativamente esteso con facies di *Flysch* nelle isole meridionali e occidentali del Dodecaneso, va gradatamente scomparendo verso nord e verso est.

A Piscopi e a Simi il *Flysch* forma dei lembi ristrettissimi e strizzati nel nucleo delle sinclinali, mentre è dubbio che l'*Eocene* sia rappresentato nelle altre isole ove non solo mancano fossili ad esso riferibili, ma anche rocce del *Flysch* ⁽¹⁾.

Anche il *Miocene* marino ha un'estensione molto limitata. Tra le isole in questione, affiora solo a Calimno ove fu da tempo segnalato dal De Stefani. Nelle isole di Lero e di Lipso osservai invece un complesso di calcari più o meno farinosi, bianchi, gialli e bruni passanti verso il basso ad arenarie e conglomerati, del tutto simili a quelli di Samo e di Scalanova e discordanti colle formazioni più antiche. La fauna in essi contenuta ricca di individui mal conservati, ma povera di specie — appartenenti in buona parte ai generi *Melanopsis*, *Parhydrobia*, *Pyrgula*, *Fossarulus*, *Planorbis*, ecc. — non offre elementi sicuri di giudizio sull'età per la mancanza di specie caratteristiche e per la prevalenza di specie nuove. Ciò nonostante detta fauna risulta completamente d'acqua dolce o salmastra e ciò può essere indirettamente confermato dalla mancanza di qualsiasi traccia di foraminifere e dalla presenza di frammenti di diatomee.

Per le analogie con i calcari di Samo, Scalanova ecc., per la mancanza di specie levantine, pare assai probabile che si tratti di *Miocene* lacustre (Sarmatico o Pontico) e ad esso ritengo sieno da riferire anche gli strati d'acqua dolce segnalati dal Neumayr alla base della serie Neogenica di Cos.

Mancano invece elementi per giudicare l'età di un piccolo affioramento di calcari farinosi biancastri con foraminiferi che sta immerso nelle rocce eruttive di Patmo.

Il *Pliocene* è rappresentato in una sola isola del Dodecaneso, a Cos, ed è noto da tempo, in grazia dello studio del Neumayr. Forse contemporanea ad esso o ai depositi del Quaternario inferiore (Siciliano) soprastanti, potrebbe essere la parte basale dei calcari farinosi gialli, simili al cosiddetto *poros*, ma con resti di conchiglie terrestri che formano delle grandi placche nell'isola di Piscopi e più limitatamente compaiono a Simi, come pure dei conglomerati senza fossili che occupano brevi tratti di superficie a Calimno.

(1) A Lero tuttavia, nel conglomerato neogenico, rinvenni dei ciottoli di un calcare nummulitico del tutto simile litologicamente ai calcari immediatamente circostanti, nei quali però non mi riuscì di trovare fossili.

Al *Quaternario* recente sono poi da riferire alcuni lembi di *panchina* con fossili marini di Càlimno insieme colla parte superiore di quelli terrestri di Piscopi, Simi e Lero spesso mescolati, questi ultimi, con una breccia calcarea compatta. Tutti i depositi neogenici appaiono più o meno dislocati e quelli miocenici di Lero e Lipso anche leggermente piegati. Le direzioni predominanti degli strati sono a Lipso e a Lero ONO.

Ricorderò da ultimo che l'isola di Castelrosso risulta costituita da una serie isoclinale di calcari bianco-grigi con numerosi resti di rudiste appartenenti alla Creta superiore per la metà settentrionale, da calcari eocenici bianco lattei ricchissimi di nummuliti per la metà rimanente.

Il passaggio tra i due calcari avviene gradualmente ed è formato da calcari suberistallini, bianchi, rossastri e talora brecciati.

Rocce vulcaniche. — L'isola di Patmo risulta quasi per intero costituita da *rocce eruttive*. Secondo alcune determinazioni sommarie fatte dal prof. Martelli, i tipi litologici dell'isola sarebbero: trachiti, trachiandesiti e trachidaciti. Le prime occupano un'estensione molto superiore alle altre, ma tutte si presentano con aspetto esterno molto variabile da luogo a luogo. Nella metà meridionale dell'isola tuttavia le colate appaiono composte da una roccia assai più compatta ed omogenea, mentre in quella settentrionale non è difficile riconoscere superfici e fronti di colate ed anche la lava risulta assai spesso bollosa e scoriacea. Non vi sono tracce distinte di apparato vulcanico.

Anche a Piscopi rinvenni nell'alveo di un torrentello, che scende verso la costa occidentale, un piccolissimo spuntone di roccia cristallina eruttiva immerso negli scisti diasprigni.

Molto maggiore importanza hanno invece in quest'isola le *rocce piroclastiche* di provenienza settentrionale. Sono tufi pomicei bianchi o bruni con scarse tracce di stratificazione, o per lo più incrociata, e cosparsi di proiettili vulcanici che ritengo provenienti da Nisiro. Gli stessi tufi si ritrovano anche nelle valli meridionali di Càlimno, ove sono ricoperti dalla *panchina*, e in minor quantità a Patmo.

Fisiologia. — *Contributo alla conoscenza della pressione osmotica nell'organismo degli invertebrati terrestri.* Nota di A. CLEMENTI ⁽¹⁾, presentata dal Socio corrispondente BAGLIONI ⁽²⁾.

Le sole ricerche, che esistono finora, sulla pressione osmotica negli invertebrati, sono quelle di O. Polimanti ⁽³⁾, che nel 1915 trovò, in una media di 50 esemplari di *Lymathria dispar*, un $\Delta = -0,48$; nel *Dicticus albifrons* (media 45 esemplari) un $\Delta = -0,50$; il Δ corrisponde a $-0,69$ nelle uova di *Bombix*, mentre nelle larve dello stesso animale si innalza da prima a $-1,78$, per poi abbassarsi nuovamente a $-0,70$ e $-0,80$, e nel sangue delle larve di *Bombix Mori* il Δ , secondo lo stesso autore, passa da $-0,715$ nel 33^{mo} giorno, a $-0,520$ nel 39^{mo} giorno. Questi dati assai interessanti, ottenuti da Polimanti, non riescono da soli a colmare la lacuna, segnalata anche da Bottazzi ⁽⁴⁾ fin dal 1908, rappresentata dalla deficienza di notizie intorno alla pressione osmotica nei liquidi e nei tessuti negli invertebrati terrestri, dovuta al fatto che, a causa delle piccole dimensioni di questi organismi, è difficile procurarsi il materiale in quantità sufficiente per analisi chimico-fisiche; per contribuire a colmare la lacuna surrilevata ho intrapreso le presenti indagini sulla concentrazione molecolare dell'emolinfia o dei tessuti solidi ridotti in finissima poltiglia (procedimento di Sabbatani) in alcune specie di invertebrati terrestri e in diverse condizioni sperimentali. Le determinazioni del punto di congelamento furono fatte con un crioscopio tipo Bekmann ⁽⁵⁾, piccolo modello, su esemplari sacrificati specialmente nel periodo invernale, di cui alcuni (*Lumbricus T.*, *Julus T.*, *Orictes nasicornis*) furono tenuti fino al momento dell'esperienza nel terriccio umido, dove essi normalmente vivono, gli altri (*Helix*) all'aria e alla temperatura ambiente; gli esemplari di *Helix* furono sacrificati in diversi periodi del letargo e anche nel periodo del risveglio. I principali risultati sono riassunti nella seguente tabella:

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

⁽²⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Roma.

⁽³⁾ Polimanti, Biochemische Zeitschrift, Band 70, 1915.

⁽⁴⁾ Bottazzi, Ergebnisse der Physiologie, Band. VII, 1908.

⁽⁵⁾ Sabbatani, Journal de Physiologie et de Pathologie générale, III, pag. 939, a. 1901.

TABELLA.

SPECIE	DATA	TESSUTI ESAMINATI	Punto di congelamento (Δ)
<i>Lumbricus terrestris</i> .	Marzo 1924	Organismo di 6 esemplari <i>in toto</i>	— 0°,45
<i>Lumbricus terrestris</i> .	Gennaio 1924	Idem	— 0°,46
<i>Lumbricus terrestris</i> .	Febbraio 1924	Idem	— 0°,51
<i>Lumbricus terrestris</i> .	Marzo 1924	Idem	— 0°,48
<i>Julus terrestris</i>	Febbraio 1924	Organismo di 10 esemplari <i>in toto</i>	— 0°,46
<i>Helix A.</i>	Dicembre 1922 (dopo 2 mesi di letargo).	Liquido celomatico di 6 esemplari	— 0°,40
<i>Helix A.</i>	Febbraio 1923 (dopo 4 mesi di letargo).	Idem	— 0°,41
<i>Helix A.</i>	Giugno 1923 (alla fine del letargo).	Idem	— 0°,46
<i>Helix A.</i>	Luglio 1923 (passato il letargo).	Idem	— 0°,36
<i>Helix A.</i>	Dicembre 1922 (passato il letargo)	Tessuti <i>in toto</i> di 6 esem- plari privi del liquido celomatico.	— 0°,67
<i>Helix A.</i>	Febbraio 1923 (dopo 4 mesi di letargo).	Idem	— 0°,66
<i>Helix A.</i>	Giugno 1923 (alla fine del letargo).	Idem	— 0°,68
<i>Helix A.</i>	Giugno 1923 (alla fine del letargo).	Idem	— 0°,68
<i>Orjctes nasicornis</i> (lar- va).	Marzo 1924	Emolinfa di 6 esemplari	— 0°,76
<i>Orjctes nasicornis</i> (lar- va).	Marzo 1924	Idem	— 0°,77

Dai dati ottenuti risulta, che la concentrazione molecolare dei tessuti e dei liquidi *in toto* del complessivo organismo in alcune specie di invertebrati terrestri (anche appartenenti a classi lontane nella scala zoologica come ad esempio *Lumbricus T.* *Julus T.*), è poco elevata e quasi uguale ($\Delta = -0°,46$) a quella del liquido celomatico dell'*Helix* ($\Delta = -0°,40$); la concentrazione molecolare in quest'ultimo resta costante durante il periodo del letargo e dopo il risveglio, ed è notevolmente inferiore alla concentrazione molecolare dei tessuti solidi dello stesso animale ($\Delta = -0°,68$). La concentrazione molecolare dell'emolinfa dalla larva di *Orichtes nasicornis*

è notevolmente più elevata della concentrazione molecolare del liquido celomatico dell'*Helix* e il valore del Δ da me trovato ($\Delta = - 0^{\circ},76$) è uguale a quello trovato da Polimanti nell'emolinfa delle larve di *Bombix Mori* ($= - 0^{\circ},70, - 0^{\circ},80$), e verosimilmente quindi, come in questo caso, sta in rapporto con lo sviluppo ontogenetico dell'animale.

La comparazione dei dati surriferiti con quelli ottenuti da Polimanti e da altri sperimentatori (Bottazzi, Fredericq) negli invertebrati marini e nei vertebrati marini e terrestri, permette di venire alla conclusione, che anche nel regno degli invertebrati, analogamente a quanto avviene nel regno dei vertebrati, la pressione osmotica dei liquidi interni dell'organismo nelle specie terrestri è meno elevata che nelle specie marine, e, in linea di massima, nello stesso organismo è più bassa nei liquidi interni che non nei tessuti solidi.

Anatomia. — *Osservazioni su lo sviluppo e l'anatomia del miotomo nei Teleostei* ⁽¹⁾. Nota di M. SELLA, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽²⁾.

Le osservazioni seguenti furono compiute sulle larve dei Murenoidi, per quanto riguarda lo sviluppo, e sopra un maggior numero di Teleostei, per quanto riguarda le condizioni definitive (*Anguilla*, *Conger*, *Congromuraena*, *Muraena*, *Orcynus*, *Euthynnus*, *Pelamys*, *Scomber*, *Auxis*, *Brama*, *Mugil*, *Alosa*, *Rhombus* ecc.).

Tecnica. — Mi sono spesso servito, per ricostruire il miomero nello spazio, di un metodo il quale permette, oltre alla ricostruzione plastica materiale, di farsi mentalmente un'idea immediata della forma del miomero, in base ad una sola, o ad un numero limitato di sezioni trasversali.

In una sezione trasversa si osservano numerose aree, che corrispondono a sezioni di miomeri successivi; ora, se si pensa che tali aree equivalgono alla proiezione sul piano trasversale delle sezioni corrispondenti ad un unico miomero, praticate a distanze di un metamero (lunghezza di una vertebra) l'una dall'altra, basterà, per riprodurre il miomero, allontanare nello spazio le singole aree alle distanze volute. Ciò vale, in senso rigoroso, solo per un sistema in cui i miomeri si ripetano esattamente con la stessa forma (almeno per il tratto in cui si estende il miomero considerato); in pratica, tuttavia, le variazioni sono poco sensibili.

A distanze di un metamero, le sezioni trasverse si ripetono: per ottenere un'approssimazione maggiore nei dettagli della ricostruzione, si baserà questa anche su una o più sezioni intermedie.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 16 marzo 1924.

Spostamento delle inserzioni del miomero nella regione laterale e cambiamento di rapporti con gangli, nervi e scheletro assile, nei Murenoidi. — Nei primi stadi il miosetto che separa due miotomi è disposto in senso trasversale all'asse; quindi s'incurva a semplice gomito, mantenendo la sua superficie normale al piano sagittale. Il ganglio ha posizione *intersegmentale*, e il nervo spinale decorso *settale*. Essi mantengono (mi riferisco sempre alla regione laterale) tale posizione anche quando il miomero si accresce a W, fino al periodo di trasformazione. Nel frattempo sono apparse le vertebre cordali o protocentrocicli (Grassi) peculiari dei Murenoidi, e gli archi; gli archi hanno allora posizione *settale* e i setti cadono a *metà delle vertebre cordali*.

Nel periodo di trasformazione, durante il quale la vertebra cordale viene abbracciata dalla vertebra definitiva pericordale, il miomero s'inclina e subisce uno *slittamento all'innanzi (cran.) con la porzione anteriore dell'inserzione profonda, e all'indietro (caud.) con l'inserzione superficiale*.

Esiste quindi una certa analogia con il processo ad altalena che si verifica negli Amnioti (secondo il Bruni, Archiv f. Entwickl.-mech., XXXII, 1, 1911).

Lo slittamento dell'inserzione profonda avviene in questo modo. Il miocomma, nel punto corrispondente alla sua intersezione con il setto longit. laterale non si sposta sensibilmente, ed è l'unico punto il quale mantiene i rapporti primitivi e *segna nel miomero definitivo la posizione che originariamente aveva il miotomo*. Ma subito dorsalmente e ventralmente al setto laterale, l'inserzione profonda vien tirata ad angolo in senso *craniale*, e si determina così un angolo laterale dorsale e un angolo laterale ventrale. Ciò fa sì che i rapporti con gangli, nervi ed archi, i quali non seguono lo spostamento, cambino, e precisamente: il ganglio non ha più posizione intersegmentale, *ma si trova allontanato in sensocaudale, dal setto che gli compete, di $\frac{2}{3}$ di un metamero circa*; il nervo spinale pure, in parte del suo decorso, si trova spostato caudalmente; il miosetto, e quindi il miomero, spinge le sue inserzioni cranialmente *fino a raggiungere la regione intervertebrale precedente (cran.) e in parte anche il bordo posteriore della vertebra precedente*.

Quest'ultima condizione fa pensare a quella dei vertebrati superiori, in cui costole e inserzioni ad esse della muscolatura, sono intervertebrali; (d'altra parte in alcuni Teleostei, p. es. la Perca, l'arco stesso si trova vicinissimo alla regione intervertebrale).

I cambiamenti che avvengono nei rapporti d'inserzione con gli archi, sono assai notevoli. Nello sviluppo, infatti, l'inserzione profonda dei setti subisce, al di là dei due angoli laterali, un'inclinazione sempre più forte, provocata da uno slittamento in senso caudale, ed ogni miocomma viene così a incrociare (almeno nella regione dorsale), due archi neurali; in altre parole *ciascun arco serve di attacco a più di un setto e miomero; siamo qui*

ben lontani dalla condizione rappresentata nello schema classico, dell'arco interposto fra due miomeri successivi.

Sviluppo del setto laterale ecc. — Intorno a tale sviluppo trovo soltanto, nella letteratura, un accenno di Rabl per i Selaci (Morph. Jahrb., XIX, 1893).

Nei Murenoidi esso si sviluppa tardi, durante la trasformazione, e diventa completo solo a metamorfosi ultimata. Esso va estendendosi con forma falcata dal setto caudale a quello craniale e dall'esterno all'interno.

Correlativamente, o almeno di pari passo con la sua formazione, si osservano i seguenti fatti:

Il nervo della linea laterale *si approfonda e subisce una rotazione di 180°.*

Lo straterello di muscolatura laterale superficiale, prima limitato alla parete esterna, *s'insinua lungo l'una e l'altra faccia del setto laterale, e si approfonda, a mano a mano che si forma il setto, per tutto lo spessore della muscolatura.* Avviene infatti una sorta d'incartocciamento delle due metà del miomero dall'esterno all'interno, lungo la linea laterale.

Direzione delle fibre muscolari nel miomero. — Nel cono tipico, le fibre si inclinano in modo da convergere verso l'interno dell'angolo formato dai miosetti; è questa una regola generale, che si modifica allorchè ci si allontana dalla tipica forma conica.

Variazioni nella forma del miomero lungo il corpo dello stesso individuo. — Le variazioni nella forma del miomero, che si riscontrano in uno stesso pesce, andando dal capo alla coda, *ripetono l'evoluzione che il miotomo ha subito, durante lo sviluppo, per giungere alla condizione più complicata, rappresentata dal miomero della regione caudale.*

Differenziazioni del miomero, e muscoli speciali per la prima volta qui ricordati. — Nella regione anteriore del tronco di *Conger*, la porzione profonda dei coni, pur continuando a far parte del miomero, si separa e mette in rapporto con i processi trasversi delle vertebre, dando luogo a un *muscolo intertrasversario.*

In alcuni *Scomberoidi* (*Thynnus thunnina* C. V.), nella regione anteriore del tronco, la porzione profonda dei coni che guarda il setto laterale, *si separa e dà origine a un sistema speciale di tendini.*

Nel *Mugil* il miomero si divide in due nel suo spessore, dando origine ad una *doppia metameria muscolare*, più o meno completa.

Attacchi del miomero e tendini. — Il miomero s'inserisce con i miosetti alla pelle ed al piano scheletrico. L'inserzione non è uniforme, ma più robusta in corrispondenza a tre punti, sia per il piano superficiale, sia per quello profondo, dove anzi è più potente.

Questi punti, considerati nella serie dei miomeri, costituiscono, nella generalità dei Teleostei, *tre linee d'attacco, per le quali si esercita il maggior*

sforzo; esse linee passano l'una a metà del corpo, e le altre due in corrispondenza agli angoli dorsale e ventrale.

Nell'angolo, dorsale o ventrale, converge in una fascia un sistema di fibre tendinee che s'individua nello spessore del miosetto, sopra la faccia del cono rivolta verso detto angolo. Le miospine si dispongono secondo la direzione di questi fasci e funzionano, come essi, da tendini. Verso l'angolo sono pure orientate parte delle fibre tendinee delle lamelle distali.

Sin qui gli attacchi non escono dal territorio entro cui è confinato ciascun miomero.

Esistono però, nel piano del setto laterale, anche serie di tendini *che si allontanano dal miomero, e vanno ad inserirsi per loro conto a punti assai più caudali. Negli Scomberoidi questi tendini sono costituiti da veri e propri cordoni.* Ad essi convergono i fasci che abbracciano la porzione dei coni rivolta verso il setto laterale. Tali cordoni decorrono inclinati lungo la faccia ventrale del setto, e vanno ad inserirsi a una vertebra situata più caudalmente di 5-7 metameri.

Tutti i *Teleostei* presentano una condizione che può essere ricondotta a questo tipo; soltanto, invece di tendini ben individuati, si può trovare una semplice fascia, e l'inserzione, fuori del miomero, può spingersi solo ad una o due vertebre più caudali.

COMUNICAZIONI VARIE

Dopo lettura e approvazione del verbale della scorsa seduta, il Presidente VOLTERRA annuncia che è presente il prof. P. LASAREFF, membro dell'Accademia delle scienze di Russia, al quale dà il benvenuto. Il prof. Lasareff ringrazia e fa omaggio di alcune sue pubblicazioni, delle quali discorre.

Il PRESIDENTE informa i Colleghi delle feste che ebbero luogo in Napoli per la celebrazione del 7° centenario dell'Università di quella città, celebrazione alla quale egli rappresentò l'Accademia dei Lincei, offrendo un indirizzo a nome dell'Accademia stessa.

Il PRESIDENTE presenta un piego suggellato, inviato dal Socio B. GRASSI, perchè sia conservato negli Archivi dell'Accademia.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CASTELNUOVO presenta i libri giunti in dono, segnalando fra questi numerose pubblicazioni di cui hanno fatto omaggio i Soci Corrispondenti G. LEVI e F. SACCO. Fa anche menzione di una *Bibliographie de la Relativité*, di M. LECAT.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 maggio 1924.

- AGAMENNONE G. — Le tremblement de terre du 2 janvier 1924 sur la côte Adriatique des Marches (Extr. da Journal de Bruxelles « Ciel et Terre », année XL, n. III, pp. 67-70). s. 1, 1924. 8°.
- ARIONE L. — Variazioni della grandezza degli ossicini dell'udito nel periodo di accrescimento e nell'adulto (Estr. dal « Monitore Zoologico Italiano », anno XXXIV, pp. 45-48). Siena, 1923. 8°.
- ARIONE L. — Ricerche citometriche sul nucleo a grosse cellule del nervo coelare degli uccelli (Estr. dal « Monitore Zoologico Italiano », anno XXXIV, n. XI, pp. 216-221). Siena, 1923. 8°.
- BRUNO G. — Il cuore umano in precoci stadii dello sviluppo embrionale e l'epoca della comparsa delle prime miofibrille (Estr. dal « Monitore Zoologico Italiano », anno XXXIV, pp. 81-92). Siena, 1923. 8°.
- DUNHAM TH. J. and RICHARDS TH. W. — The Effect of Changing Hydrogen-Ion Concentration on the Potential of the Zinc Electrode (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLIV, n. IV, 1923, pp. 678-684). s. d. 8°.
- GRAIG M. W. and RICHARDS TH. W. — The atomic Weight of Gallium (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLV, n. VI, 1923, pp. 1155-1167). s. d. 8°.
- LASAREFF P. — Application de la loi de Weber-Fechner a la photométrie (Extr. de la « Revue d'optique théorique et instrumentale »). Paris, 1924. 8°, pp. 1-6.
- LASAREFF P. — Jontentheorie der Reizung (Abhandlungen und Monographien aus dem Gebiete der Biologie und Medizin, Hefte III). Bern, 1923. 8°, pp. 1-ix, 1-51.
- LASAREFF P. — Recherches sur la théorie jonique de l'excitation. Part I. Moscou, 1918. 8°, pp. 1-155.
- LASAREFF P. — Sur la cause physico-chimique de l'absence de la fatigue dans les centres nerveux au cours de leur action (Extr. des « Comptes rendus de l'Académie des sciences », t. 178, 1924, pp. 1100-1101). s. d. 4°.
- LASAREFF P. — Sur l'anomalie magnétique de Koursk (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences », t. 178). s. d. 4°, pp. 1-4.
- LASAREFF P. — Sur la lois des anomalies magnétiques provoquées soit par les courants électriques, soit par les gisements magnétiques (Extr. des « Comptes rendus de l'Académie des sciences », t. 178). s. d. 4°, pp. 1-3.
- LASAREFF P. — Sur les anomalies du magnétisme terrestre et de la gravité dans le gouvernement de Koursk (Russie) (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences », t. 177). s. d. 4°, pp. 1-3.
- LASAREFF P. — Sur une théorie physique des réactions chimiques (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences », t. 178). s. d. 4°, pp. 1-2.
- LECAT M. — Bibliographie de la relativité. Bruxelles, 1924. 8°, pp. 1-xii, 1-290; 1-47.
- LEVI G. — Condriosomi e Simbioti (Estr. dal « Monitore Zoologico Italiano », anno XXXIII, n. VII-VIII, 1922, pp. 99-118). s. d. 8°.

- LEVI G. — Culture di tessuti (Estr. dal « *Monitore Zoologico Italiano* », anno XXXIV, n. IX, fasc. 170-174). Siena, 1923. 8°.
- LEVI G. — Differenze nei caratteri dei fibroblasti nelle culture « in vitro » in relazione al grado di differenziazione del tessuto espantato (Estr. dall'« *Archivio italiano di anatomia e di embriologia* », vol. XX, fasc. IV, pp. 511-521). Firenze, 1923. 8°.
- LEVI G. — Esiste un centrosoma nelle cellule nervose? (Estr. dal « *Monitore Zoologico Italiano* », anno XXXII, n. XI, pp. 149-155). Firenze, 1922. 8°.
- LEVI G. — I fattori che regolano la migrazione e la moltiplicazione delle cellule coltivate in vitro (Estr. dall'« *Archivio di fisiologia* », vol. XXI, fasc. IV, 1923, pp. 283-297). Firenze, 1923. 8°.
- LEVI G. — Le condizioni che regolano l'accrescimento dei tessuti « in vitro » secondo recenti ricerche (Estr. dalla « *Rivista di biologia* », vol. V, fasc. II). Roma, 1923. 8°, pp. 1-9.
- LEVI G. — L'instabilità di forma del condrioma nelle cellule viventi (Estr. dal « *Monitore Zoologico Italiano* », anno XXX, n. II-III, pp. 33-41). Siena, 1924. 8°.
- LEVI G. — Sul modo di formazione della cavità amniotica nei Chiropteri (Estr. dal « *Monitore Zoologico Italiano* », anno XXXII, n. V-IV, pp. 49-66). Firenze, 1922. 8°.
- LEVI G. — Sopravvivenza e coltivazione di organi e tessuti (Estr. dal « *Giornale di biologia e medicina sperimentale* », vol. I, fasc. VII). s. d. 8°, pp. 1-4.
- LEVI G. — Struttura e proprietà degli endoteli vascolari. Ricerche su culture in vitro (Estr. dal « *Giornale di biologia e medicina sperimentale* », volume I, fasc. VIII, 1923). s. d. 8°, pp. 1-4.
- LEVI G. — Trasformazione delle fibre dei muscoli scheletrici di embrione di pollo nelle culture in vitro (Comuni-
cazione fatta alla R. Accademia di medicina di Torino nella seduta del 29 giugno 1923). s. d. 8°. pp. 1-4.
- MILONE S. — La frequenza delle divisioni mitotiche negli elementi del midollo spinale embrionale di animali di differente mole corporea (Estr. dall'« *Archivio italiano di anatomia e di embriologia* », vol. XX, fasc. III, pp. 417-432). Firenze, 1923. 8°.
- PUTZEYS P. and RICHARDS TH. W. — The Atomic Weight of Lead from the Belgian Congo (Repr. from the « *Journal of the American Chemical Society* », vol. XLV, n. XII, 1923, pp. 2954-2958). s. d. 8°.
- RICHARDS TH. W. — Compressibility, Internal-Pressure and Atomic Magnitudes (Repr. from the « *Journal of the American Chemical Society* », vol. XLV, n. II, 1923, pp. 422-437). s. d. 8°.
- RICHARDS TH. W. and RICHARDS T. W. — Preliminary Attempt to Measure gravimetrically the Distance-effect of chemical Affinity (Repr. from the « *Proceedings of the National Academy of sciences* », vol. IX, n. XI, 1923, pp. 379-383). s. d. 8°.
- RICHARDS TH. W. and SMYTH CH. P. — Solid Thallium Amalgams and the Electrode Potentia of pure Thallium (Repr. from the « *Journal of the American Chemical Society* », vol. XLIV, n. III, 1922, pp. 524-545). s. d. 8°.
- RICHARDS TH. W. and GRAIG M. W. — The Atomic Weight of Gallium (Repr. from the « *Journal of the American Chemical Society* », vol. XLV, n. VI, 1923, pp. 1155-1167). s. d. 8°.
- RICHARDS TH. W. and PUTZEYS P. — The Atomic Weight of Lead from the Belgian Congo (Repr. from the « *Journal of the American Chemical Society* », vol. XLV, n. XII, 1923, pp. 2954-2958). s. d. 8°.
- RICHARDS TH. W. and RICHARDS W. T. — The Effect of a Magnetic Field on the Potential of Hydrogen occluded in Iron (Repr. from the « *Journal of*

- the American Chemical Society », vol. XLVI, n. I, 1924, pp. 89-104). s. d. 8°.
- RICHARDS TH. W. and DUNHAM TH. J. — The Effect of Changing Hydrogen-Ion Concentration on the Potential of the Zinc Electrode (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLIV, n. IV, 1922, pp. 678-684). s. d. 8°.
- RICHARDS TH. W. and TAMARU S. — The Heat of Solution in Hydrochloric Acid (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLIV, n. V, 1922, pp. 1060-1066). s. d. 8°.
- RICHARDS TH. W. and SMITH CH. P. — The Heat of Solution of Thallium in dilute Thallium Amalgams (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLV, n. VI, 1923, pp. 1455-1460). s. d. 8°.
- RICHARDS TH. W. and ROWE A. W. — The Heats of Neutralization of Potassium, Sodium and Lithium Hydroxides with Hydrochloric, Hydrobromic, Hydriodic and Nitric Acids, at various Dilutions (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLIV, n. IV, 1922, pp. 684-707). s. d. 8°.
- RICHARDS W. T. — La signification actuelle des poids atomiques. Conference faite devant la Société chimique de France le 12 juillet 1922 (Extr. du « Bulletin de la Société chimique de France », vol. XXXI, 1922). Paris, 1922. 8°, pp. 1-15.
- RICHARDS W. T. and RICHARDS TH. W. — Preliminary Attempt to Measure gravimetrically the Distance effect of chemical Affinity (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of sciences », vol. IX, n. XI, 1923, pp. 379-383). s. d. 8°.
- RICHARDS W. T. and RICHARDS TH. W. — The Effect of a Magnetic Field on the Potential of Hydrogen occluded in Iron (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLVI, n. I, 1924, pp. 89-104). s. d. 8°.
- ROWE A. W. and RICHARDS TH. W. — The Heats of Neutralization of Potassium, Sodium and Lithium Hydroxides with Hydrochloric, Hydrobromic, Hydriodic and Nitric Acids, at Various Dilutions (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLVI, n. IV, 1922, pp. 684-707). s. d. 8°.
- SACCO F. — I fenomeni selenologici in rapporto colla gravità e l'attrazione (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », vol. LIX, 1924, pp. 125-129). s. d. 8°.
- SACCO F. — Arturo Issel (Estr. dal « Bollettino del R. Ufficio Geologico d'Italia », vol. XLIX, 1922-1923, n. I). Roma, 1923. 8°, pp. 1-24.
- SACCO F. — Castelletti di Castellamonte (Estr. dalla Rivista l'« Escursionista », anno XXVI, n. II). Torino, 1923. 8°, pp. 1-7.
- SACCO F. — Come si è formata l'Italia (Estr. dalla Rivista l'« Escursionista », anno XXV, n. IV-VI). Torino, 1923. 8°, pp. 1-19.
- SACCO F. — Come si formò il Cervino (Estr. dalla Rivista « Giovane Montagna », anno IX, n. II). Torino. s. d. 8°, pp. 1-8.
- SACCO F. — Come sorse la Grivola (Estr. dalla Rivista turistica « Pro Piemonte »). Torino, 1923. 8°, pp. 1-10.
- SACCO F. — Fera Filbert. Unione escursionisti 1922 (Estr. dal Bollettino l'« Escursionista », anno XXIV, n. VI). Torino, s. d. 8°, pp. 1-8.
- SACCO F. — Il glacialismo della Valle di Susa (Estr. dal periodico « L'Universo », anno II, n. VIII, 1921). Torino, 1921. 8°, pp. 1-32.
- SACCO F. — Il glacialismo nel gruppo del Gran Paradiso (Estr. dal « Boll. del Comitato Glaciologico Italiano », n. IV, V, 1921, 1922). Roma, 1923. 8°, pp. 1-125.
- SACCO F. — Il glacialismo nelle Valli Grisanche, Rhêmes e Savaranche (Valle d'Aosta) (Estr. dall'« Universo », an. II, n. XI-XII, 1921). s. d. 8°, pp. 1-40.

- SACCO F. — I massi erratici ed il sentimento religioso (Estr. dalla Rivista « Giovane Montagna », anno VIII, n. III). Torino, s. d. 8°, pp. 1-7.
- SACCO F. — I principali massi erratici dell'anfiteatro morenico di Rivoli (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana », vol. XLI, pp. 161-174). Torino, 1922. 8°.
- SACCO F. — La crue actuelle des glaciers dans la Vallée d'Aoste (Estr. de la Revue « Augusta Praetoria », n. VII-X, 1921). Torino, s. d. 8°, pp. 1-14.
- SACCO F. — L'esogenia quaternaria del gruppo dell'Argentera (Alpi Marittime) (Estr. dal « Giornale di Geologia pratica », anno IX, fasc. V-VI, pp. 162-206) Parma, s. d. 8°.
- SACCO F. — L'età delle montagne (Estr. dalla Rivista la « Giovane Montagna », anno XII, n. I, 1921). Torino, s. d. 8°, pp. 1-7.
- SACCO F. — Nelle regioni petrolifere dell'Appennino settentrionale (Estr. dalla Rivista mensile del Touring Club Italiano « Le vie d'Italia »). Milano, 1924. 8°, pp. 1-12.
- SACCO F. — Nuovi cenni di fossili cretacei negli argilloschisti dell'Appennino settentrionale (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », vol. LIX, pp. 29-43). Torino, 1923. 8°.
- SACCO F. — Osservazioni glaciologiche nella regione Dolomitica del Veneto (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana », vol. XXXIX, pp. 213-220). Torino, 1920. 8°.
- SACCO F. — Porte e finestre di montagna (Estr. dalla Rivista l'« Escursionista », anno XXV, n. II). Torino, 1922. 8°, pp. 1-4.
- SACCO F. — Rinvenimento di *Uintacrinus* nell'Appennino settentrionale (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », vol. LVIII, pp. 107-112). s. d. 8°.
- SACCO F. — Roches plissées dans la Vallée d'Aoste (Estr. de la Revue « Augusta Praetoria », n. XI-XII, 1923). Torino, 1923. 8°, pp. 1-7.
- SACCO F. — Sopra un caso speciale di Litofagia (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », vol. LVII, 1921-22, pp. 488-493). s. d. 8°.
- SACCO F. — Sul gigantismo di alcune forme eoceniche dell'Istria (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », vol. LVII, 1921, pp. 351-358). s. d. 8°.
- SACCO F. — Sul gigantismo di alcune forme fossili dell'Istria (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », vol. LVII, 1921-22, pp. 591-596) s. d. 8°.
- SACCO F. — Talismani (?) preistorici (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino » vol. LVIII, pp. 383-390). s. d. 8°.
- SACCO F. — Una gigantesca collana di gemme glaciali (Estr. dalla Rivista Taristica « Pro Piemonte », pp. 17-34). Torino, 1923. 8°.
- SACCO F. — Una punta vergine (Estr. dal Bollettino l'« Escursionista », anno XXIV, n. XI, 1922). Torino, s. d. 8°, pp. 1-4.
- SMYTH CH. P. and RICHARDS TH. W. — Solid Thallium Amalgams and the Electrode Potential of Pure Thallium (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society » vol. XLIV, n. III, 1922, pp. 524-545). s. d. 8°.
- SMYTH CH. P. and RICHARDS TH. W. — The Heat of Solution of Thallium in dilute Thallium Amalgams (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLV, n. VI, 1923, pp. 1455-1460). s. d. 8°.
- TAMARU S. and RICHARDS TH. W. — The Heat of Solution of Cadmium in Hydrochloric acid (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society » vol. XLIV, 1922, pp. 1060-1066). s. d. 8°.

